

Technische Universität Berlin  
Institut für theoretische Physik

# Einfluß der baryonischen Kühlung auf die Halo-Konfiguration der Dark-Matter

Diplomarbeit



Jochen Sebastian Klar  
Matrikel-Nummer 208512

Titelbild: Kugelsternhaufen M80

(Quelle : <http://hubblesite.org/newscenter/archive/1999/26/image/a>)

# Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird untersucht, welchen Einfluss Kühlung auf die Konfiguration eines kugelsymmetrischen Halos aus dunkler Materie und baryonischem Gas hat. Zu diesem Zweck, wird angenommen, dass die Geschwindigkeit der dunklen Materie lokal einer Maxwellverteilung folgt. Es ist so möglich, die dunkle Materie als Fluid zu behandeln und entsprechende dynamische Gleichungen abzuleiten, welche analog zu den Euler-Gleichungen des idealen Gases sind. Von polytropen Anfangsbedingungen ausgehend, wird mit Hilfe eines Godunov-Algorithmus erster Ordnung die Dynamik des kombinierten Systems berechnet und anschließend analysiert. Als Kühlung wird reine Wasserstoff-Rekombinationskühlung verwendet. Es werden Rechnungen mit einer vereinfachten Kühlfunktion durchgeführt, die zu gegebenem Zeitpunkt deaktiviert wird. Hierbei zeigt sich, dass die dunkle Materie das Gas zu einer weiteren Kontraktion anregen kann. Der entscheidende Parameter hierfür ist der Adiabatenexponent des Gases. In weiteren Rechnungen, die mit einer realistischen, selbstregulierten Funktion für die Rekombinationskühlung getätigt werden, wird das Verhalten von Halos untersucht, die von ihren Dimensionen Galaxien bzw. Kugelsternhaufen entsprechen. Ihr Verhalten wird mit der Dynamik von reinen Gashalos ohne dunkle Materie verglichen. Es zeigt sich, dass der Galaxienhalo aufgrund seiner hohen Temperatur in allen Fällen vollständig kollabiert und die dunkle Materie den Kollaps beschleunigt. Bei dem Halo von der Größe eines Kugelsternhaufen hängt es hingegen sensibel von der Anfangstemperatur ab, ob er kollabiert oder von einem quasistationären Zustand langsam wieder expandiert. In vergleichenden Rechnungen mit einem reinen Gashalo von der Masse der Gaskomponente im kombinierten System findet man hingegen, dass dieser aufgrund seiner geringeren Temperatur (durch das Fehlen der Dunklen Materie ist das Potential geringer) nicht gekühlt wird und daher auch nicht kollabiert. Ein Gashalo, der von der Masse im Bereich der Gesamtmasse des kombinierten Systems liegt, kollabiert in jedem Fall.



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>7</b>
1.1	Dunkle Materie . . . . .	7
1.2	Kosmologische Simulationen . . . . .	8
1.3	Aufbau der Arbeit . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Grundlegende Gleichungen</b>	<b>11</b>
2.1	Die Gleichung für das Gravitationsfeld . . . . .	11
2.2	Das Gleichungssystem für die baryonische Komponente . . . . .	12
2.3	Das Gleichungssystem für die dunkle Materie . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Benutzte Algorithmen</b>	<b>29</b>
3.1	Das Riemann-Problem für die Euler-Gleichungen . . . . .	29
3.2	Die Methode nach Godunow . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Anfangsverteilung und Kühlfunktion</b>	<b>43</b>
4.1	Anfangsverteilung . . . . .	43
4.2	Analyse der stationären Lösungen . . . . .	48
4.3	Kühlung der baryonischen Komponente . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Numerische Berechnungen</b>	<b>59</b>
5.1	Anfangsbedingungen . . . . .	60
5.2	Hauptprogramm . . . . .	61
<b>6</b>	<b>Ergebnisse</b>	<b>67</b>
6.1	Rechnungen mit der einfachen Kühlfunktion . . . . .	67
6.2	Rechnungen mit der realistischen Kühlfunktion . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Diskussion und Fazit</b>	<b>85</b>



# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Dunkle Materie

Innerhalb der letzten Jahrzehnte hat sich in der Astrophysik die Vorstellung durchgesetzt, dass neben der gewöhnlichen *baryonischen* Materie noch eine weitere Art von Materie existiert, die sogenannte *dunkle Materie*. Diese Materie wechselwirkt nur gravitativ und kann elektromagnetische Strahlung weder emittieren noch absorbieren. Eingeführt wurde die dunkle Materie zunächst, um die beobachteten Rotationskurven von Galaxien zu erklären. Diese fallen nämlich für große Radien nicht ab, wie aus der Verteilung der sichtbaren Materie in den Galaxien zu erwarten wäre, sondern bleiben nahezu konstant. Nimmt man nun an, dass die Galaxien in einen Halo aus unsichtbarer, dunkler Materie eingebettet sind, welcher den Großteil der Galaxienmasse ausmacht, lassen sich die beobachteten Rotationskurven rekonstruieren. Auch die Dynamik von Galaxienhaufen lässt sich durch das Vorhandensein dunkler Materie erklären. Durch Ausnutzen des schwachen und des starken Gravitationslinseneffektes lassen sich mittlerweile die Strukturen der dunklen Materie unabhängig von der baryonischen Materie beobachten (Clowe et al. 2006 [3], Jee et al. 2007 [5]). Dennoch konnte die dunkle Materie in Experimenten der Hochenergiephysik bis heute noch nicht direkt nachgewiesen werden.

Gestützt auf hochpräzise Beobachtungen hat sich in der Kosmologie das  $\Lambda$ CDM-Modell durchgesetzt. Dieses Modell basiert auf einem Robertson-Friedman-Kosmos mit verschwindender Krümmung. Vom Urknall ausgehend, expandiert das Universum zunächst inflationär. In dieser Phase wachsen anfängliche Fluktuationen zu nahezu skaleninvarianten, adiabatischen, Gauss-verteilten Störungen an, deren Leistungsspektrum einem Potenzgesetz (*power-law*) gehorcht. Aus diesen Störungen entstehen die heute beobachtbaren Strukturen im All (Galaxienhaufen, Galaxien). Nach dieser Inflation findet die weitere Expansion gemäss der Friedmanngleichung statt.

Das Modell wird als  $\Lambda$ CDM-Modell bezeichnet, da in ihm die Dynamik des Kosmos von der homogen verteilten dunklen Energie (gegeben durch den  $\Lambda$ -Term der Einstein'schen Feldgleichungen oder aber durch andere zeitabhängige Modelle) und kalter dunkler Materie (*cold dark matter* - CDM) dominiert. Kalt bedeutet hierbei, dass es sich um nichtrelativistische Materie handelt. Lediglich ein kleiner Anteil der kosmischen Materie besteht aus Baryonen. Dadurch dass die dunkle Materie nicht mit dem elektromagnetischen Feld wechselwirkt, kann sie auch schon vor der Entkopplung des Strahlungsfeldes und der Baryonen

Strukturen ausbilden. Die Baryonen können dies nicht, da der Strahlungsdruck jeglicher Strukturbildung entgegenwirkt. Ohne diese Strukturen der dunkle Materie hätten sich seit der Entkopplung nicht die heute beobachtbaren Strukturen ausbilden können.

Die einzelnen Anteile an der Gesamtenergiedichte, die, da es sich um einen flachen Kosmos handelt, der kritischen Energiedichte entspricht, sind (entnommen aus [16]):

- 4,7 % baryonische Materie
- ca. 24 % kalte dunkle Materie
- ca. 70 % dunkle Energie

Das  $\Lambda$ CDM-Modell ist keine deduktive Theorie im klassischen Sinne. Es erfährt seine Legitimation vielmehr daraus, dass es verschiedenste astrophysikalische Beobachtungen konsistent beschreibt. Besonders hervorzuheben sind hierbei die Vermessung des kosmischen Mikrowellenhintergrundes durch den COBE und den WMAP Satelliten (siehe auch Spergel et al. 2003 [16], Spergel et al. 2006 [15]), die Bestimmung der Hubblekonstante durch Supernova-Beobachtungen und die systematischen Durchmusterungen des Himmels zur Bestimmung der Galaxienverteilung im Kosmos, wie z. B. beim Sloan Digital Sky Survey.

## 1.2 Kosmologische Simulationen

Die Strukturbildung im Universum wird heute mittels aufwendiger Computersimulationen untersucht. Die ersten dieser Simulationen betrachteten nur die Dynamik der dunklen Materie. Da diese nur gravitativ wechselwirkt, wird sie als kollisionsfrei angenommen. Die Zeitentwicklung ihrer Phasenraum-Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  ist daher durch die stossfreie Boltzmann-Gleichung gegeben. In karthesischen Koordinaten lautet sie:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \sum_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial v_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (1.1)$$

Hierbei ist  $\Phi$  das Gravitationspotential. Diese Differentialgleichung in 6 Dimensionen kann durch ein  $N$ -Teilchen Problem approximiert werden, in dem die Teilchen nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz wechselwirken. Für eine kosmologische Simulation wird nun eine gleichmäßige Verteilung von Teilchen gemäß der schon oben erwähnten Anfangsstörungen gestört und anschließend die Bewegung der Teilchen nach den Newton'schen Gesetzen berechnet. Offensichtlich ist eine möglichst hohe Anzahl an Teilchen zu wählen, um einerseits ein möglichst repräsentatives Volumen zu simulieren und andererseits die entstehenden Strukturen möglichst genau auflösen zu können. Die rechenintensivsten dieser Simulationen benutzen  $2048^3$  Teilchen.

Im Jahre 1997 veröffentlichten Julio Navarro, Carlos Frenk und Simon White eine Arbeit [11], in der sie die Ergebnisse mehrere solcher  $N$ -Teilchen Simulationen auswerteten. Sie fanden, dass die entstehenden Halos dunkler Materie einem nahezu universellen Dichteprofil folgten. Dieses Profil, nach den Autoren *NFW-Profil* genannt, hat folgende Gestalt:

$$\frac{\rho(r)}{\rho_{\text{crit}}} = \frac{\delta_c}{(r/r_s)(1 + r/r_s)^2} \quad (1.2)$$

Die kritische Dichte  $\rho_{\text{crit}}$  ist hierbei durch die kosmologischen Parameter gegeben und  $r_s$  bezeichnet den Radius bei dem die Steigung von einer  $r^{-1}$  Proportionalität in eine  $r^{-3}$  Proportionalität übergeht. Es kann gezeigt werden, dass  $r_s$  und die charakteristische Dichte  $\delta_c$  von einander abhängig sind. Das Profil hängt daher nur von einem freien Parameter ab. Dieser Parameter ist nur von der Masse abhängig, nicht aber von anderen Faktoren, wie z. B. der Zeitspanne in der sich der Halo gebildet hat oder den zu Grunde liegenden kosmologischen Parametern. Das NFW-Profil gilt auch für neuere Simulationen. Es hat jedoch den Nachteil, dass es nicht durch Beobachtungen gestützt wird. Diese legen nahe, dass die Dichte im Zentrum eines Halos dunkler Materie gegen einen festen Wert geht. Man spricht dann von einem Kern (*core*). Das NFW-Profil wächst jedoch für  $r \rightarrow 0$  potenzartig an. Es hat dort also eine Spitze (*cusp*). Eine Erklärung für diese Diskrepanz ist bis heute nicht gefunden. Einer der Autoren, Carlos Frenk, fand in einer neueren Arbeit ein Abflachen des Dichteprofiles in Simulationen bei  $r \rightarrow 0$ .

Mit der Steigerung der Computerleistung wurde es möglich, zusätzlich zur dunklen Materie auch das baryonische Gas in die Simulationen einzubeziehen. Das Gas wird als ideal angenommen und zur Berechnung seiner Dynamik die Euler-Gleichungen verwendet. Im Gegensatz zur dunklen Materie können die Baryonen durch Strahlung geheizt und gekühlt werden. Zu Berechnung dieser Vorgänge müssen jedoch Annahmen gemacht werden, die sich unter Umständen, auf die resultierende Dynamik auswirken. Weitergehend werden auch Modelle zur Sternentstehung (die Simulationen sind um Größenordnungen zu ungenau, um die Entstehung einzelner Sterne aufzulösen), zum Einfluss des UV-Hintergrundes, der chemischen Zusammensetzung der interstellaren Materie und anderer Einflüsse verwendet. Durch all diese Maßnahmen werden zwar die Simulationen immer realistischer, die Resultate (wie z.B. die gebildeten Halo-Profile), hängen aber zum Teil sensibel von den angenommenen Modellen ab.

### 1.3 Aufbau der Arbeit

In dieser Arbeit wird nun anhand eines einfachen Modells der Einfluss der Kühlung des Gases auf die Konfiguration der dunklen Materie untersucht. Betrachtet wird ein kugelsymmetrischer Halo aus dunkler Materie und Gas in einer zunächst stabilen Konfiguration. Dem Gas wird nun, unter Voraussetzung alleiniger Rekombinationskühlung des Wasserstoffs, durch Kühlung Energie entzogen und es beginnt daraufhin in Zentrum zu fallen. Da die dunkle Materie über das Gravitationspotential mit dem Gas gekoppelt ist, ist zu erwarten, dass durch die Bewegung des Gases die Verteilung der dunklen Materie beeinflusst wird. Durch die Kugelsymmetrie des Halos findet die Berechnung nur in einer Dimension statt. Dies verringert den Rechenaufwand gegenüber einem vollständigen, dreidimensionalen Modell.

Um die Dynamik der Dunklen Materie zu beschreiben, wird sie, anders als in den oben beschriebenen Simulationen, nicht durch Teilchen approximiert, sondern als Fluid behandelt. Möglich wird dies durch die Annahme, die dunkle Materie gehorche zu jedem Zeitpunkt lokal einer Maxwellverteilung. Es wird in dieser Arbeit gezeigt, dass unter dieser Annahme auch für die dunkle Materie ein polytroper Zusammenhang zwischen Geschwindigkeitsdispersion und Dichte besteht. Als stabile Anfangskonfiguration können daher polytrophe Verteilungen verwendet werden. Darüberhinaus lassen sich auch für die dunkle Materie Methoden der numerischen Gasdynamik anwenden. In dieser Arbeit wird zur Berechnung

der Dynamik ein Godunov-Algorithmus 1. Ordnung benutzt.

Die vereinfachende Annahme lokal Gauss-verteilter Geschwindigkeiten der DM leitet sich aus der beobachteten Geschwindigkeitsverteilung in virialisierten oder gar relaxierten Halos dunkler Materie ab. Infolge des Prozesses der so genannten *violent Relaxation* stellt sich offenbar ein Gleichgewichtszustand ein, bei dem die Geschwindigkeiten einer Maxwellverteilung genügen. In Bezug auf die globale Verteilung lässt sich dies aus allgemeinen Annahmen ableiten (siehe z.B. Nakamura 2000 [10]). Die im weiteren vorausgesetzte lokale Maxwellverteilung muss sich bei jedem Zeitschritt durch genügend schnelle dynamische Wechselwirkung der Teilchen einstellen. Gegenüber dem Einfluss der anderen, im Kontext dieser Arbeit gemachten Näherungen, wird der Einfluss dieser Annahme auf die Dynamik des Gases jedoch als gering erachtet. Vorrangiges Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Untersuchung, inwieweit der wechselseitige, allein gravitative Einfluss zwischen dunkler Materie und baryonischem Gas deren Dynamik beeinflusst.

Zunächst wird die Dynamik des System unter Verwendung einer vereinfachten Kühlfunktion untersucht, die zu einem gewählten Zeitpunkt deaktiviert wird. Besonderes Augenmerk wird dabei auf die Entwicklung des Systems nach dem Abschalten der Kühlung gelegt. Es werden mehrere Rechnungen durchgeführt, um den Einfluss der verschiedenen Parameter zu klären.

In weiteren Rechnungen wird dann eine realistische Kühlfunktion für die Rekombinationskühlung verwendet. Mit ihr werden die Dynamik eines Halo von der Größe einer Galaxie und der eines Kugelsternhaufens untersucht. Auch hierbei werden zur Untersuchung der Einflüsse der Parameter wieder mehrere Rechnungen durchgeführt.

Im zweiten Kapitel werden die grundlegenden Gleichungen für das Gravitationsfeld und die Dynamik des baryonischen Gases eingeführt. Hierbei werden alle Aspekte der Hydrodynamik erläutert, die den folgenden Kapiteln als Grundlage dienen. Insbesondere die Gleichungen, auf denen die verwendeten numerischen Methoden basieren, werden vorgestellt. Darauf folgend werden aus der kollisionsfreien Boltzmann-Gleichung, unter der besprochenen Annahme lokaler Maxwellverteilung, die dynamischen Gleichungen für die dunkle Materie abgeleitet und die erwähnten Analogien zum Gas besprochen. Anschließend werden im dritten Kapitel die Algorithmen erklärt, die zur numerischen Berechnung der Halodynamik verwendet werden. Es wird ausführlich das Riemann-Problem besprochen und die Godunov-Methode vorgestellt. Im vierten Kapitel werden die polytropen Anfangsverteilungen hergeleitet und deren Stabilität analysiert. Außerdem wird dort der verwendete Kühlmechanismus für die Baryonen beschrieben. Daran anschließend, werden im fünften Kapitel die im Zusammenhang mit dieser Arbeit geschriebenen Programme erläutert. Die verschiedenen, mit ihnen durchgeführten Rechnungen werden in Kapitel 6 besprochen. Abschließend werden diese Ergebnisse in Kapitel 7 diskutiert.

# Kapitel 2

## Grundlegende Gleichungen

### 2.1 Die Gleichung für das Gravitationsfeld

Die Gravitation ist die zentrale Wechselwirkung, die die Dynamik eines Halos bestimmt. Durch sie ist die dunkle Materie an das System gebunden und auch an die baryonische Materie gekoppelt. In der Newtonschen Mechanik berechnet sich das Gravitationspotential einer beliebigen Dichteverteilung  $\rho(\mathbf{x})$  durch die Poisson-Gleichung:

$$\Delta\Phi(\mathbf{x}) = 4\pi G \rho(\mathbf{x}) . \quad (2.1)$$

Hierbei ist die  $G$  die Newton'sche Gravitationskonstante ( $G = 6,67 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^3 \text{ g s}^{-2}$ , [8]). In Kugelkoordinaten im sphärisch symmetrischen Fall transformiert sich die Poisson-Gleichung zu:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial\Phi(r)}{\partial r} \right) = 4\pi G \rho(r) \quad (2.2)$$

In den dynamischen Gleichungen, die in den folgenden Abschnitten vorgestellt werden, benötigt man, anstatt des Gravitationspotentials, nur die Gravitationsbeschleunigung  $g = -\frac{\partial\Phi}{\partial r}$ . Eingesetzt in (2.2) erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) = -4\pi r^2 G \rho \quad (2.3)$$

Daraus folgt durch Integration:

$$g(r) = -\frac{4\pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 \rho(r') \text{ dr}' \quad (2.4)$$

Mit diesem Zusammenhang kann nun aus der radialen Dichteverteilung die Gravitationsbeschleunigung berechnet werden.

Betrachtet man ein System aus den zwei Komponenten dunkle Materie und baryonisches Gas, berechnen sich das Gravitationspotential und die Gravitationsbeschleunigung aus der

Summe der einzelnen Dichten  $\rho_{\text{Gesamt}} = \rho_d + \rho_b$ . Hierbei sind dunkle Materie und Gas mit dem Index  $d$  bzw.  $b$  bezeichnet. Es folgt somit:

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) = -4 \pi r^2 G (\rho_d(r) + \rho_b(r)) \quad (2.5)$$

und

$$g(r) = -\frac{4 \pi G}{r^2} \int_0^r r'^2 (\rho_d(r') + \rho_b(r')) dr' \quad (2.6)$$

## 2.2 Das Gleichungssystem für die baryonische Komponente

### 2.2.1 Konservative Formulierung

Zur Beschreibung der baryonischen Komponente wird das Modell des idealen Gases verwendet, dessen Dynamik durch die Euler-Gleichungen gegeben ist. Verwendet man zur Beschreibung des Gases die Erhaltungsgrößen des Systems, spricht man von konservativer Formulierung. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden zunächst die quellenfreien Euler-Gleichungen vorgestellt. Gegen Ende des Kapitels werden diese dann um Quellterme, die unter anderem das Gravitationsfeld enthalten, erweitert. In der Hydrodynamik werden Volumenelemente betrachtet, die viele Moleküle des Gases enthalten, aber klein gegenüber den Skalen des betrachteten Systems sind. In diesen Volumenelementen sind die Größen Dichte  $\rho$ , mittlere Geschwindigkeit der Moleküle  $u$  und der Druck  $p$  gegeben.

In differentieller Form lauten die quellenfreien, eindimensionalen Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (2.7)$$

mit den Erhaltungsgrößen  $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}$  und den Flüssen  $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho \varepsilon + p) \end{pmatrix}$ .

Die Erhaltungsgrößen  $\mathbf{Q}$  sind die Dichte, die Impulsdichte  $\rho u$  und die Energiedichte  $\rho \varepsilon$ . Für diese gilt  $\rho \varepsilon = \frac{1}{2} \rho u^2 + \rho \varepsilon_T$  mit der inneren Energiedichte  $\rho \varepsilon_T$ . Die Eulergleichungen lassen sich auf verschiedene Weise herleiten, wie z.B. aus der Boltzmann-Gleichung im Hydrodynamischen Grenzfall (siehe auch [14]).

Beim idealen Gas gilt zusätzlich als Zustandsgleichung, also als Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und innerer Energiedichte, die polytrope Zustandsgleichung (mit dem Verhältnis der spezifischen Wärmen  $\gamma = c_p/c_v$ ):

$$\varepsilon_T = \frac{p}{(\gamma - 1) \rho} \quad (2.8)$$

Die Zustandsgleichung stellt einen Zusammenhang zwischen Dichte, Druck und Energiedichte dar und schließt so das Gleichungssystem (2.7). Oft wird in der Literatur nur die Gleichung für die Impulsdichte als Euler-Gleichung bezeichnet.

Die Schallgeschwindigkeit ist definiert als die Wurzel der Ableitung des Druckes nach der Dichte bei konstanter Entropie  $s$  [17, S. 10] :

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s}. \quad (2.9)$$

Zu ihrer Berechnung führt man nun zunächst die *spezifische Enthalpie* (mit dem spezifischen Volumen  $v = 1/\rho$ )

$$h(p, \rho) = \varepsilon_T + p v \quad (2.10)$$

ein, und erhält mit Hilfe des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik  $d\varepsilon = T ds - p dV$  bzw.  $dh = T ds + v dp$  ( $T$  ist die Temperatur,  $V$  das Volumen) folgenden Zusammenhang:

$$dh = \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho dp + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p d\rho = T ds + v dp \quad (2.11)$$

Daraus folgt mit dem Differential des Druckes  $dp = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds$ :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho \left( \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds \right) + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p d\rho = \\ T ds + v \left( \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_\rho ds \right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Mit  $ds = 0$  (Entropie konstant) und  $v = 1/\rho$  folgt weiter:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p d\rho = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s d\rho \quad (2.13)$$

Schlussendlich folgt:

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s + \left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s \Rightarrow \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s = -\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho - \frac{1}{\rho}} \quad (2.14)$$

Mit

$$h = \varepsilon_T + p v = \frac{p}{(\gamma - 1)\rho} + \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.15)$$

folgt daraus:

$$-\frac{\left(\frac{\partial h}{\partial \rho}\right)_p}{\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_\rho - \frac{1}{\rho}} = -\frac{-\frac{1}{\rho^2} \frac{p\gamma}{\gamma - 1}}{\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{1}{\rho} - \frac{1}{\rho}} = \frac{\frac{p\gamma}{\rho}}{(\gamma - 1) \left(\frac{\gamma}{\gamma - 1} - 1\right)} = \frac{\frac{p\gamma}{\rho}}{\gamma - \gamma + 1} = \frac{p\gamma}{\rho} \quad (2.16)$$

Die Schallgeschwindigkeit bestimmt sich also zu:

$$a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} \quad (2.17)$$

Das Gleichungssystem (2.7) in konservativer Form, lässt sich auch in quasilinearer Form schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \mathbf{A}(\mathbf{Q}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{Q} = 0 \quad (2.18)$$

Hierzu wird die Umformung  $\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{Q})}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x}$  durchgeführt. Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{Q}}$  nimmt dann folgende Gestalt an ( $q_i$  sind hierbei die Komponenten von  $\mathbf{Q}$ ):

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 & (3-\gamma)\left(\frac{q_2}{q_1}\right) & \gamma-1 \\ \frac{\gamma q_2 q_3}{q_1} + (\gamma-1)\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^3 & \frac{\gamma q_3}{q_1} - \frac{3}{2}(\gamma-1)\left(\frac{q_2}{q_1}\right)^2 & \gamma\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}(\gamma-3)u^2 & (3-\gamma)u & \gamma-1 \\ \frac{1}{2}(\gamma-2)u^3 - \frac{a^2 u}{\gamma-1} & \frac{3-2\gamma}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} & \gamma u \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a, \quad (2.20)$$

die dazugehörigen Eigenvektoren sind:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \\ \frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} - u a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ \frac{1}{2}u^2 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{K}^{(3)} &= \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \\ \frac{1}{2}u^2 + \frac{a^2}{\gamma-1} + u a \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.21)$$

### 2.2.2 Primitive Formulierung

Die Euler-Gleichungen können außer in den Erhaltungsgrößen auch in anderen Größen geschrieben werden. In der primitiven Formulierung wählt man die *primitiven Variablen* Dichte  $\rho$ , mittlere Geschwindigkeit  $u$  und Druck  $p$  zur Beschreibung des Gases. Man erhält dann folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \\ 0 &= \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Offensichtlich lassen sich auch diese Gleichungen in quasilinearer Form schreiben:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{W} + \mathbf{A}(\mathbf{W}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{W} = 0 \quad (2.23)$$

mit  $\mathbf{W} = \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ p \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & 1/\rho \\ 0 & \rho a^2 & u \end{pmatrix}$ .

Die Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  sind wieder:

$$\lambda_1 = u - a, \quad \lambda_2 = u, \quad \lambda_3 = u + a, \quad (2.24)$$

die Eigenvektoren lauten nun:

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a/\rho \\ a^2 \end{pmatrix} \quad (2.25)$$

### 2.2.3 Charakteristische Formulierung

Eine Kurve in der der x-t-Ebene  $x(t)$ , auf der eine partielle Differentialgleichung zu einer gewöhnlichen Differentialgleichung wird, nennt man *Charakteristik*. Für die zeitliche Änderung einer Größe  $q(x(t), t)$  entlang der Charakteristik gilt dann:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{dx}{dt} \frac{\partial q}{\partial x} \quad (2.26)$$

Wellen und andere Störungen im Gas bewegen sich entlang dieser Charakteristiken. Für die Euler-Gleichungen sind diese Charakteristiken durch die Eigenwerte  $\frac{dx}{dt} = \lambda_i$  gegeben.

### 2.2.4 Entropieformulierung

Benutzt man zur Beschreibung des Gases neben Dichte und mittlerer Geschwindigkeit statt dem Druck die Entropie, gelangt man zur Entropieformulierung. In der Thermodynamik ist die Entropie  $s$  über  $ds = \frac{\delta Q}{T}$  definiert. Hierbei ist  $\delta Q$  die Änderung der Wärmemenge und  $T$  die Temperatur. Für das ideale Gas lautet der 1. Hauptsatz der Thermodynamik  $\delta Q = c_v dT + p dV$  ( $c_v$  ist die Wärmekapazität bei konstantem Volumen). Des weiteren gilt die thermische Zustandgleichung des idealen Gases  $pV = Nk_b T$  ( $N$  ist die Teilchenzahl und  $k_b$  die Boltzmann-Konstante). Es folgt daher:

$$ds = \frac{\delta Q}{T} = c_v \frac{dT}{T} + p \frac{dV}{T} = c_v \frac{dT}{T} + N k_b \frac{dV}{V} \quad (2.27)$$

Integration liefert:

$$s = c_v \ln T + N k_b \ln V + \text{const.} \quad (2.28)$$

Für die Wärmekapazität gilt  $c_v = \frac{f}{2} N k_b$  ( $f$  ist die Zahl der Freiheitsgrade) und somit folgt weiter:

$$s = c_v \ln T + \frac{2c_v}{f} \ln V + \text{const.} = c_v \left( \ln T + \frac{2}{f} \ln V \right) + \text{const.} \quad (2.29)$$

Erneute Verwendung der Zustandsgleichung  $T = \frac{pV}{Nk_b}$  liefert:

$$s = c_v \left( \ln p + \ln V + \frac{2}{f} \ln V \right) + \text{const.} = c_v \left( \ln p + \left( 1 + \frac{2}{f} \right) \ln V \right) + \text{const.} \quad (2.30)$$

Für den Adiabatenexponenten gilt  $\gamma = 1 + \frac{2}{f}$  und somit folgt:

$$s = c_v (\ln p + \gamma \ln V) + \text{const.} \quad (2.31)$$

Da für die Dichte  $\rho = \frac{N}{V}$  gilt, lässt sich weiter umformen:

$$s = c_v \left( \ln p + \gamma \ln \frac{1}{\rho} \right) + \text{const.} \quad (2.32)$$

Für die Entropie des Gases gilt somit:

$$s = c_v \ln \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + \text{const.} \quad (2.33)$$

Daraus folgt als Beziehung zwischen Druck und Entropie:

$$p = \text{const.} \cdot \rho^\gamma \exp \left( \frac{s}{c_v} \right) \quad (2.34)$$

In den neuen Variablen  $\mathbf{E} = (\rho, u, s)^T$  erhält man folgende quasi-lineare Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \mathbf{A}(\mathbf{E}) \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E} = 0 \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

Zu den schon bekannten Eigenwerten  $\lambda_1 = u - a$ ,  $\lambda_2 = u$  und  $\lambda_3 = u + a$  erhält man die Eigenvektoren

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -a/\rho \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(2)} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial p}{\partial s} \\ 0 \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a/\rho \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

Aus der Gleichung für die Entropie (2.33) erhält man:

$$\frac{\partial s}{\partial t} = \frac{c_v}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial t} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad \text{und} \quad \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{c_v}{p} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \quad (2.37)$$

Aus der dritten Zeile von (2.22) folgt dann (mit (2.37)):

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial p}{\partial x} \\
 \Leftrightarrow 0 &= \frac{p}{c_v} \left( -\frac{\partial s}{\partial t} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) + \rho a^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{p}{c_v} \left( -\frac{\partial s}{\partial x} + a^2 \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) \\
 \Leftrightarrow 0 &= -\frac{p}{c_v} \left( \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} \right) + a^2 \left( \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x}}_{=0 \text{ (Kontinuitätsgleichung)}} \right)
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Somit folgt:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \tag{2.39}$$

Die Entropie ist also entlang Stromlinien  $\frac{\partial x}{\partial t} = u$  konstant. Dies gilt jedoch nur in stetigen Flüssen, die dann isentropisch genannt werden. Druck und Dichte hängen dann über die einfachere Beziehung

$$p = C(s_0) \rho^\gamma \tag{2.40}$$

zusammen. Die Konstante  $C(s_0)$  hängt nur von der Anfangsentropie ab. Das Gleichungssystem vereinfacht sich dann zu zwei Gleichungen sowie (2.40) als Zustandsgleichung. Das System wird dann isentropisch genannt. Im Allgemeinen weist das Gas jedoch Unstetigkeiten wie z.B. Stoßwellen auf, so dass die vollständige Beschreibung gewählt werden muss.

### 2.2.5 Unstetigkeitsflächen

Als Unstetigkeitsflächen in einer Gasströmung bezeichnet man Flächen, auf denen eine oder mehrere Größen des Gases unstetig sind. Diese Flächen können sich durch das Gas mit speziellen Geschwindigkeiten bewegen. In einem idealen Gas kann es auf zwei Arten zur Ausbildungen von Unstetigkeiten kommen. Einerseits können schon die Anfangsbedingungen unstetig sein. Man spricht dann vom Riemann-Problem, welches in Abschnitt 3.1 besprochen wird. Andererseits können sich durch die Dynamik des Gases Unstetigkeiten ausbilden. Durch die Nichtlinearität der Gleichungen können sich kleine Störungen bei ihrer Bewegung entlang der Charakteristiken vergrößern und schliesslich Unstetigkeiten hervorbringen.

Ein offensichtliches Kriterium für Unstetigkeitsflächen ist die Tatsache, dass Massen-, Impuls- und Energiestrom durch die Fläche stetig sein müssen. Bezeichnet man die Gasvariablen links und rechts der Unstetigkeitsfläche mit  $\mathbf{Q}_r$  und  $\mathbf{Q}_l$ , so bedeutet das im Ruhesystem der Unstetigkeitsfläche:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_r) = \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l) \tag{2.41}$$

Übertragen in ein allgemeines System folgt die *Rankine-Hugoniot Bedingung* [7, S. 374]:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_r) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l) = S(\mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_l) \tag{2.42}$$

Hierbei ist  $S$  die Geschwindigkeit der Unstetigkeitsfläche bezüglich des Systems. Die Rankine-Hugoniot Bedingung fungiert als Randbedingung zwischen Bereichen, die durch die differentiellen Eulergleichungen, die glatte Funktionen voraussetzen, beschrieben werden.

Man kann nun die Unstetigkeitsflächen in zwei Arten unterteilen. Wenn es keinen Massefluß durch die Unstetigkeitsflächen gibt, spricht man von einer *tangentialen Unstetigkeit*. Existiert ein Massefluss, handelt es sich um eine *Stoßwelle*.

Zusätzlich dazu existieren noch *schwache Unstetigkeiten*. Hierbei handelt es sich um Flächen, an denen zwar die Größen stetig sind, ihre Ableitung aber Sprünge haben oder gegen unendlich gehen. Bereiche stetiger Expansion zwischen Gebieten, in denen die Größen konstant sind nennt man *Verdünnungswellen*. Sie werden von solchen schwachen Unstetigkeiten begrenzt.

Entlang schwacher Unstetigkeiten und tangentialer Unstetigkeiten (nicht aber entlang Stoßwellen) gelten die generalisierte Riemann-Invarianten [17, S. 80]. Dies sind Gleichungen die den Zusammenhang zwischen den Änderungen der Variablen entlang der Unstetigkeit und dem Eigenvektor zum zugehörigen Eigenwert der Welle beschreiben:

$$\frac{dq_1}{k_1^{(i)}} = \frac{dq_2}{k_2^{(i)}} = \frac{dq_3}{k_3^{(i)}} \quad (2.43)$$

Hierbei sind  $k_j^{(i)}$  die Komponenten des Eigenvektors  $\mathbf{K}^{(i)}$ .

### 2.2.6 Quellen

Wirkt eine externe Kraft auf das Gas, werden die Euler-Gleichungen um einen Quellterm ergänzt:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{S}(\mathbf{Q}) \quad (2.44)$$

Handelt es sich bei dieser Kraft um ein Gravitationsfeld, welches durch eine Gravitationsbeschleunigung  $g$  gegeben ist, folgt daraus die Kraft  $\rho g$ . Diese bewirkt nach Newton eine zusätzliche zeitliche Änderung der Impulsdichte. Weiter erhält man mit  $\rho u g$  eine Leistung, die der durch das Gravitationsfeld bewirkten zeitlichen Änderung der Energiedichte entspricht. Als Quellterm erhält man somit:

$$\mathbf{S}_{\text{grav}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \\ u \rho g \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Wird das Gas durch einen beliebigen physikalischen Prozess geheizt oder gekühlt, z.B. durch Strahlung, verändert dies seine innere Energiedichte. Es existiert dann eine weitere Quelle bzw. Senke in den Euler-Gleichungen. Konventionell wird der Heizterm mit  $\Gamma$  und

der Kühlterm mit  $\Lambda$  bezeichnet.

$$\mathbf{S}_{\text{Kühlung}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\Gamma - \Lambda}{\rho} \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird im folgenden die Substitution  $k = \frac{\Gamma - \Lambda}{\rho}$  verwendet. In dieser Arbeit wird lediglich Kühlung betrachtet. Der Heizterm ist hier nur der Vollständigkeit wegen erwähnt.

### 2.2.7 Kugelkoordinaten

Bisher wurden die Betrachtungen auf den eindimensionalen Fall beschränkt. Betrachtet man die vollständigen dreidimensionalen Euler-Gleichungen und transformiert diese unter Annahme sphärischer Symmetrie in Kugelkoordinaten, erhält man ein eindimensionales System von Euler-Gleichungen (Gleichungen für Dichte, radiale Impulsdichte und Energiedichte). Die Gleichungen für die transversalen Komponenten der Impulsdichte sind aufgrund der sphärischen Symmetrie identisch Null. Im Vergleich mit den eindimensionalen Euler-Gleichungen (2.7) treten Extraterme auf, welche zu einem zusätzlichen Quellterm zusammengefasst werden können und als Scheinkräfte interpretiert werden:

$$\mathbf{S}_{KK} = -\frac{2}{r} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho \varepsilon + p) \end{pmatrix} \quad (2.47)$$

Die vollständigen dynamischen Gleichungen für die baryonische Komponente lauten demnach:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{S}(\mathbf{Q}) \quad (2.48)$$

mit

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho \varepsilon \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ u(\rho \varepsilon + p) \end{pmatrix} \quad (2.49)$$

$$\text{und } \mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \\ u \rho g \end{pmatrix} - \frac{2}{r} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho \varepsilon + p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}. \quad (2.50)$$

Ausgeschrieben lauten die Gleichungen nun:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u) + \frac{2 \rho u}{r} \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u^2 + p) + \frac{2 \rho u^2}{r} + \rho g \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (u (\rho \varepsilon + p)) + \frac{2 u (\rho \varepsilon + p)}{r} + \rho u g + k. \end{aligned} \quad (2.51)$$

## 2.3 Das Gleichungssystem für die dunkle Materie

### 2.3.1 Die Momente der stoßfreien Boltzmann-Gleichung

Die dunkle Materie wird durch ein stoßfreies Gas beschrieben. Die Teilchen wechselwirken nicht miteinander sondern nur mit dem mittleren Gravitationsfeld des gesamten Systems. Wie schon in der Einleitung erwähnt, findet die Zeitentwicklung der Phasenraum-Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  in einem solchen kollisionsfreien System gemäß der stoßfreien Boltzmann-Gleichung (*Collisionless Boltzmann Equation* - CBE) statt. In den allgemeinen Phasenraumkoordinaten  $\mathbf{w} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$  lautet sie:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum_{n=1}^6 \frac{\partial (f \dot{w}_n)}{\partial w_n} \quad (2.52)$$

In kartesischen Koordinaten nimmt sie die bekannte Form an:

$$0 = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + a_i \frac{\partial}{\partial v_i} f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \quad (2.53)$$

Hierbei ist  $a_i = \frac{F_i}{m}$  die auf die Teilchen wirkende Beschleunigung (spezifische Kraft). Diese ist, in einem Halo aus dunkler Materie, nur durch den negativen Gradienten des Gravitationspotentials  $-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$  gegeben. Hier und im folgenden wird die Einstein'sche Summenkonvention verwendet, das heißt, innerhalb eines Summanden wird über zwei gleiche Indizes summiert.

Durch Berechnung der Momente der CBE lassen sich Gleichungen für die Erhaltungsgrößen des Systems gewinnen. Zunächst integriert man die Gleichung über die Geschwindigkeit:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int f d^3\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i f d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial}{\partial v_i} f d^3\mathbf{v} \quad (2.54)$$

und benutzt die Definition der Dichte  $\int f d^3\mathbf{v} = \rho$ . Des Weiteren zerlegt man die Geschwindigkeit in einen Mittelwert  $u_i$  und eine statistisch darum streuende Abweichung  $w_i$ . Für  $w_i$  gilt  $\int w_i f d^3\mathbf{v} = 0$ . Somit wird der zweite Term in (2.54) zu:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} \int (u_i + w_i) f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} u_i \int f d^3\mathbf{v} = \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \rho) \quad (2.55)$$

Der dritte Term in (2.54) verschwindet, da er sich einerseits über den Satz von Gauss in ein Oberflächenintegral umwandeln lässt und andererseits  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  für grosse Geschwindigkeiten gegen Null geht. Man erhält daher aus (2.54) die Kontinuitätsgleichung:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i \rho) \quad (2.56)$$

Überschiebt man die CBE mit der Geschwindigkeit  $v_j$  und integriert anschließend über die Geschwindigkeit, erhält man drei Bilanzgleichungen für die Komponenten der Impuls-

dichte:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int v_j f \, d^3\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i v_j f \, d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial}{\partial v_i} f \, d^3\mathbf{v} \quad (2.57)$$

Der erste Term berechnet sich analog zu (2.55) und der zweite Term berechnet sich mit dem Spannungstensor  $\rho \sigma_{ij}^2 = \int w_i w_j f \, d^3\mathbf{v}$  zu:

$$\int v_i v_j f \, d^3\mathbf{v} = \int (u_i + w_i)(u_j + w_j) f \, d^3\mathbf{v} = \rho u_i u_j + \rho \sigma_{ij}^2 \quad (2.58)$$

In einem Orthogonalsystem sind die Komponenten der Geschwindigkeit unkorreliert. Der Spannungstensor bzw. der Tensor der Geschwindigkeitsdispersion  $\sigma_{ij}^2$  ist daher diagonal.

Der dritte Term lässt sich mit partieller Integration zu

$$-\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j \frac{\partial}{\partial v_i} f \, d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial v_j}{\partial v_i} f \, d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \delta_{ij} f \, d^3\mathbf{v} = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.59)$$

umformen. Letztendlich erhält man so:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j + \rho \sigma_{ij}^2) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.60)$$

Zuletzt wird die CBE mit dem Betragsquadrat der Geschwindigkeit  $v_j v_j$  überschoben und dann über die Geschwindigkeit integriert:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \int v_j v_j f \, d^3\mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i v_j v_j f \, d^3\mathbf{v} - \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j v_j \frac{\partial}{\partial v_i} f \, d^3\mathbf{v} \quad (2.61)$$

Wieder wurde der erste Term schon zuvor berechnet (Gleichung (2.59)). Der zweite Term ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} \int v_i v_j v_j f \, d^3\mathbf{v} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \int (u_i + w_i)(u_j + w_j)(u_j + w_j) f \, d^3\mathbf{v} \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j u_j + \rho u_i \sigma_{jj}^2 + 2 \rho u_j \sigma_{ji}^2) \end{aligned} \quad (2.62)$$

Hierbei ist zu beachten, dass Integrale von der Form  $\int w_i w_j w_j f \, d^3\mathbf{v}$  (wie zuvor jene von der Form  $\int w_i f \, d^3\mathbf{v}$ ) hier verschwinden, da die dunkle Materie als lokal Gauss-verteilt angenommen wird. Erst diese starke Einschränkung ermöglicht einen Abschluss des Gleichungssystems. Um den dritten Term in (2.61) umzuformen, wird wieder partielle Integration angewendet:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int v_j v_j \frac{\partial}{\partial v_i} f \, d^3\mathbf{v} &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int \frac{\partial (v_j v_j)}{\partial v_i} f \, d^3\mathbf{v} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int 2 v_j \delta_{ij} f \, d^3\mathbf{v} \\ &= \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \int 2 (u_i + w_i) f \, d^3\mathbf{v} = 2 \rho u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Abschließend erhält man eine Gleichung für die Energiedichte:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2 + \rho \sigma_{ii}^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u^2 + \rho u_i \sigma_{jj}^2 + 2 \rho u_j \sigma_{ji}^2) + 2 \rho u_i \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \quad (2.64)$$

### 2.3.2 Transformation in Kugelkoordinaten

Um die im vorhergehenden Abschnitt hergeleiteten Gleichungen zur Beschreibung der Dynamik eines Halos dunkler Materie zu verwenden, werden sie unter Annahme sphärischer Symmetrie in Kugelkoordinaten transformiert. Hierzu wird das Tensorkalkül und insbesondere die kovariante Ableitung verwendet (Siehe auch [18]). Die einzelnen Terme werden zunächst in Tensorschreibweise umgeschrieben (griechische Indizes) und anschließend die kovarianten Ableitungen berechnet. Aufgrund sphärischer Symmetrie verschwinden alle Ableitungen in  $\vartheta$ - und  $\varphi$ -Richtung sowie die nicht-radialen Komponenten der Geschwindigkeit  $u^\vartheta$  und  $u^\varphi$ . Der metrische Tensor in Kugelkoordinaten lautet

$$g_{ik} = \text{diag} [1, r^2, r^2 \sin^2 \vartheta] \quad \text{und} \quad g^{ik} = \text{diag} [1, 1/r^2, 1/(r^2 \sin^2 \vartheta)] \quad (2.65)$$

und somit berechnen sich die (nicht verschwindenden) Christoffel-Symbole 2. Art zu:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r &= -r \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \vartheta \\ \Gamma_{\varphi\varphi}^\vartheta &= -\sin \vartheta \cos \vartheta \\ \Gamma_{r\vartheta}^\vartheta = \Gamma_{\vartheta r}^\vartheta = \Gamma_{r\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi r}^\varphi &= 1/r \\ \Gamma_{\vartheta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\vartheta}^\varphi &= \cot \vartheta \end{aligned} \quad (2.66)$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit transformieren sich allgemein nach:

$$u^\alpha = (u_r, u_\vartheta/r, u_\varphi/(r \sin \vartheta)) = (u_r, 0, 0) \quad (2.67)$$

In der Kontinuitätsgleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \quad (2.68)$$

wird nun der Divergenz-Term tensoriell geschrieben und in Kugelkoordinaten transformiert. Die Summation über die Christoffelsymbole besteht nur aus zwei nichtverschwindenden Termen. Es ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) &\hat{=} (\rho u^\alpha)_{;\alpha} = (\rho u^\alpha)_{,\alpha} + \rho \Gamma_{\beta\alpha}^\alpha u^\beta = (\rho u^r)_{,r} + \rho \Gamma_{r\alpha}^\alpha u^r \\ &= (\rho u^r)_{,r} + \rho (\Gamma_{r\vartheta}^\vartheta u^r + \Gamma_{r\varphi}^\varphi u^r) \hat{=} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r) + \frac{2\rho u_r}{r} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Die Kontinuitätsgleichung lautet in Kugelkoordinaten also:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r) + \frac{2\rho u_r}{r} \quad (2.70)$$

Die Gleichung für die Impulsdichte lautet:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_j) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j + \rho \sigma_{ij}^2) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_j} \quad (2.71)$$

Es wird im folgenden nur die Gleichung für die  $r$ -Komponente gebraucht, da die Gleichungen für die anderen Komponenten identisch Null sind. Der zweite Term in (2.71) lautet tensoriell:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u_j + \rho \sigma_{ij}^2) = (\rho u^\alpha u^\beta + \rho (\sigma^2)^{\alpha\beta})_{;\alpha} \quad (2.72)$$

Es ist praktisch, die beiden Summanden getrennt zu betrachten. Der erste transformiert sich zu:

$$\begin{aligned} (\rho u^\alpha u^\beta)_{;\alpha} &\hat{=} (\rho u^\alpha u^\beta)_{,\alpha} + \rho (\Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha u^\gamma u^\beta + \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta u^\alpha u^\gamma) \\ &= (\rho u^r u^r)_{,r} + \rho (\Gamma_{r\alpha}^\alpha u^r u^\beta + \Gamma_{r\alpha}^\beta u^\alpha u^r) \\ &= (\rho u^r u^r)_{,r} + \frac{2\rho u^r}{r} \\ &\hat{=} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^2) + \frac{2\rho u_r^2}{r} \end{aligned} \quad (2.73)$$

Die Diagonalelemente des Spannungstensors transformieren sich analog zu den Quadraten der Geschwindigkeitskomponenten zu:

$$(\sigma^2)^{rr} = \sigma_r^2, \quad (\sigma^2)^{\vartheta\vartheta} = 1/r^2 \sigma_\vartheta^2, \quad (\sigma^2)^{\varphi\varphi} = 1/(r^2 \sin^2 \vartheta) \sigma_\varphi^2 \quad (2.74)$$

Somit ergibt sich für den zweiten Term aus (2.72):

$$\begin{aligned} (\rho (\sigma^2)^{\alpha\beta})_{;\alpha} &\hat{=} (\rho (\sigma^2)^{\alpha\beta})_{,\alpha} + \rho (\Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha (\sigma^2)^{\gamma\beta} + \Gamma_{\gamma\alpha}^\beta (\sigma^2)^{\alpha\gamma}) \\ &= (\rho (\sigma^2)^{rr})_{,r} + \rho (\Gamma_{r\alpha}^\alpha (\sigma^2)^{rr} + \Gamma_{\vartheta\vartheta}^r (\sigma^2)^{\vartheta\vartheta} + \Gamma_{\varphi\varphi}^r (\sigma^2)^{\varphi\varphi}) \\ &\hat{=} \frac{\partial}{\partial r} (\rho (\sigma^2)_r) + \frac{\rho}{r} (2\sigma_r^2 - \sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Der Term mit dem Gradienten des Gravitationspotentials transformiert sich zu:

$$\rho \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \hat{=} \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (2.76)$$

Somit erhält man als Bilanzgleichung für den Radialimpuls in Kugelkoordinaten:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^2) + \frac{2\rho u_r^2}{r} + \frac{\partial}{\partial r} (\rho \sigma_r^2) + \frac{\rho}{r} (2\sigma_r^2 - \sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2) + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (2.77)$$

Für die tangentielle Geschwindigkeitsdispersion gilt  $\sigma_\vartheta^2 = \sigma_\varphi^2 =: \sigma_T^2$ . Es ist nun praktisch den Anisotropiefaktor  $\beta = 1 - \sigma_T^2/\sigma_r^2 \Rightarrow -\sigma_r^2(\beta - 1) = \sigma_T^2$  einzuführen. Im später

betrachteten Fall der isotropen Geschwindigkeitsdispersion gilt  $\sigma_T^2 = \sigma_r^2$  und damit  $\beta = 0$ . Die Terme, die  $\beta$  enthalten, fallen dann folglich weg. Zunächst folgt:

$$(2\sigma_r^2 - \sigma_\vartheta^2 - \sigma_\varphi^2) = (2\sigma_r^2 - 2\sigma_T^2) = (2\sigma_r^2 + 2\beta\sigma_r^2 - 2\sigma_r^2) = 2\beta\sigma_r^2 \quad (2.78)$$

Und (2.77) vereinfacht sich zu:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_r) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^2 + \rho \sigma_r^2) + \frac{2\rho u_r^2}{r} + \frac{2\beta\rho\sigma_r^2}{r} + \rho \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (2.79)$$

Die letzte umzuformende Gleichung ist die Gleichung für die Energiedichte:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho u^2 + \rho \sigma_{ii}^2) + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u^2 + \rho u_i \sigma_{jj}^2 + 2\rho u_j \sigma_{ji}^2) + 2\rho u_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \quad (2.80)$$

Die Spur des Spannungstensors ist im Tensor-Kalkül  $\sigma_{ii}^2 \hat{=} (\sigma^2)^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}$  und somit wird der erste Term in (2.80) zu:

$$\begin{aligned} (\rho u^2 + \rho \sigma_{ii}^2) &\hat{=} (\rho u^2 + \rho (\sigma^2)^{\alpha\beta} g_{\alpha\beta}) \\ &= (\rho u^2 + \rho ((\sigma^2)^{rr} g_{rr} + (\sigma^2)^{\vartheta\vartheta} g_{\vartheta\vartheta} + (\sigma^2)^{\varphi\varphi} g_{\varphi\varphi})) \\ &= (\rho u^2 + \rho (\sigma_r^2 + \sigma_\vartheta^2 + \sigma_\varphi^2)) = (\rho u^2 + \rho (\sigma_r^2 + 2\sigma_T^2)) \\ &= (\rho u^2 + (3 - 2\beta)\rho\sigma_r^2) \end{aligned} \quad (2.81)$$

Die einzelnen Summanden im Divergenz-Term von (2.80) werden im folgenden einzeln behandelt. Sie transformieren sich zu:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i u^2) \hat{=} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^3) + \frac{2\rho u^3}{r} \quad (2.82)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i \sigma_{jj}^2) \hat{=} \frac{\partial}{\partial r} ((3 - 2\beta) u_r \rho \sigma_r^2) + \frac{2}{r} (3 - 2\beta) u_r \rho \sigma_r^2 \quad (2.83)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} (2\rho u_j \sigma_{ji}^2) &\hat{=} (2\rho u_\beta (\sigma^2)^{\alpha\beta})_{;\alpha} \\ &= (2\rho u_\beta (\sigma^2)^{\alpha\beta})_{,\alpha} + 2\rho (-\Gamma_{\beta\alpha}^\gamma u_\gamma (\sigma^2)^{\alpha\beta} \\ &\quad + \Gamma_{\gamma\alpha}^\alpha u_\beta (\sigma^2)^{\gamma\beta} + \Gamma_{\beta\alpha}^\gamma u_\beta (\sigma^2)^{\alpha\gamma}) \\ &= (2\rho u_\beta (\sigma^2)^{\alpha\beta})_{,\alpha} + 2\rho \Gamma_{r\alpha}^\alpha u_r (\sigma^2)^{rr} \\ &\hat{=} \frac{\partial}{\partial r} (2u_r \rho \sigma_r^2) + \frac{2}{r} (2u_r \rho \sigma_r^2) \end{aligned} \quad (2.84)$$

Für den gravitativen Term gilt:

$$2\rho u_i \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \hat{=} 2\rho u_r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \quad (2.85)$$

Zusammenfassend erhält man so:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u_r^2 + (3 - 2\beta) \rho \sigma_r^2) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u_r^3) + \frac{2 \rho u^3}{r} \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} ((3 - 2\beta) u_r \rho \sigma_r^2) + \frac{2}{r} (3 - 2\beta) u_r \rho \sigma_r^2 \\
&+ \frac{\partial}{\partial r} (2 u_r \rho \sigma_r^2) + \frac{2}{r} (2 u_r \rho \sigma_r^2) + 2 \rho u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Nach Division durch zwei und mit der Definition der Energiedichte  $\rho \varepsilon = \left( \frac{1}{2} u^2 + \frac{(3-2\beta)}{2} \sigma_r^2 \right)$  erhält man abschließend:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \rho \varepsilon + \frac{\partial}{\partial r} (u_r (\rho \varepsilon + \rho \sigma_r^2)) + \frac{2 u_r (\rho \varepsilon + \rho \sigma_r^2)}{r} + \rho u_r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \tag{2.87}$$

Der Index  $r$  der mittleren radialen Geschwindigkeit wird ab jetzt weggelassen, da das Gleichungssystem durch die Transformation auf Kugelkoordinaten in ein eindimensionales Problem überführt worden ist. Die radiale Geschwindigkeitsdispersion  $\sigma_r^2$  ist jedoch noch vom Betrag der Geschwindigkeitsdispersion  $\sigma^2$  zu unterscheiden, es gilt  $\sigma^2 = 3 \sigma_r^2$

### 2.3.3 Analogien zu den Eulergleichungen

Das in den vorhergehenden Abschnitten gewonnene Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u) + \frac{2 \rho u}{r} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u^2 + \rho \sigma_r^2) + \frac{2 \rho u^2}{r} + \frac{2 \beta \rho \sigma_r^2}{r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (u (\rho \varepsilon + \rho \sigma_r^2)) + \frac{2 u (\rho \varepsilon + \rho \sigma_r^2)}{r} + \rho u \frac{\partial \Phi}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.88}$$

ist im Fall isotroper Geschwindigkeitsdispersion  $\beta = 0$  und mit der, zunächst willkürlichen, Einführung eines Analogons zum Druck  $\pi := \rho \sigma_r^2$  vollständig analog zu den Gleichungen des idealen Gases (2.51):

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u) + \frac{2 \rho u}{r} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u^2 + \pi) + \frac{2 \rho u^2}{r} + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (u (\rho \varepsilon + \pi)) + \frac{2 u (\rho \varepsilon + \pi)}{r} + \rho u \frac{\partial \Phi}{\partial r}
\end{aligned} \tag{2.89}$$

Aus der Definition der Energiedichte lässt sich das Analogon der inneren Energiedichte ablesen:

$$\rho \varepsilon_T = \frac{3}{2} \rho \sigma_r^2 = \frac{3}{2} \pi \tag{2.90}$$

Durch Vergleich mit der allgemeinen Zustandsgleichung (2.8) für das polytrope Gas erhält man ein Analogon zum Adiabatenexponenten  $\gamma$ :

$$\rho \varepsilon_T = \frac{\pi}{(\gamma - 1)} = \frac{3}{2} \pi \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{5}{3} \quad (2.91)$$

Dies entspricht dem Adiabatenexponenten eines Gases mit 3 Freiheitsgraden. Durch die Analogie zu den Gleichungen des idealen Gases lassen sich nun numerische Techniken der Gasdynamik auch auf die dunkle Materie anwenden.

Auch der isentropische Zusammenhang  $\pi \propto \rho^\gamma$  gilt für die dunkle Materie. Um dies zu zeigen, werden die dynamischen Gleichungen in der folgenden Form verwendet:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \pi + \rho \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ 0 &= 2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \varepsilon + \pi)) + 2 \rho u \frac{\partial \Phi}{\partial r} \end{aligned} \quad (2.92)$$

(Die zweite Gleichung erhält man aus der Gleichung für die Impulsdichte durch Anwenden der Produktregel und durch Verwendung der Kontinuitätsgleichung.)

Zunächst wird aus der Gleichung für die Energiedichte eine Gleichung für die Geschwindigkeitsdispersion  $\sigma^2$  gewonnen. Es werden zunächst folgende Umformungen durchgeführt:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) &= 2 \frac{\partial}{\partial t} \left( \rho \left( \frac{1}{2} \rho u^2 + \frac{1}{2} \rho \sigma^2 \right) \right) = u^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho + 2 \rho u \frac{\partial}{\partial t} u + \sigma^2 \frac{\partial}{\partial t} \rho + \rho \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 \\ &= -\frac{u^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) - 2 \rho u^2 \frac{\partial}{\partial r} u - 2 u \frac{\partial \pi}{\partial r} + 2 \rho u \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ &\quad - \frac{\sigma^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) + \rho \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \varepsilon + \pi)) &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho u^2 + \rho \sigma^2 + 2\pi)) \\ &= \frac{u^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) + 2 \rho u^2 \frac{\partial}{\partial r} u + 2 u \frac{\partial \pi}{\partial r} + \frac{2\pi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) + \rho u \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.94)$$

Einsetzen in die Gleichung für die Energiedichte liefert:

$$\begin{aligned} 0 &= \rho \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 + \rho u \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 + \frac{2\pi}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 + u \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 + \frac{2\pi}{\rho} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u \end{aligned} \quad (2.95)$$

Ersetzt man nun noch  $\pi$  durch  $\frac{1}{3} \rho \sigma^2$  erhält man:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 + u \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 + \frac{2}{3} \sigma^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u \quad (2.96)$$

Als nächstes wird die Kontinuitätsgleichung umgeformt:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + u \frac{\partial}{\partial r} \rho + \rho \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u)
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial t} \rho - \frac{u}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} \rho \\
 &= -\frac{\partial}{\partial t} \ln \rho - u \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Eingesetzt in (2.96) erhält man:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 + u \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 + \frac{2}{3} \sigma^2 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 u \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 + u \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho + u \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho \right) \\
 &= \frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial t} \sigma^2 + \frac{u}{\sigma^2} \frac{\partial}{\partial r} \sigma^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho + u \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \sigma^2 + u \frac{\partial}{\partial r} \ln \sigma^2 - \frac{2}{3} \sigma^2 \left( \frac{\partial}{\partial t} \ln \rho + u \frac{\partial}{\partial r} \ln \rho \right) \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\rho}{\sigma^3} + u \frac{\partial}{\partial r} \ln \frac{\rho}{\sigma^3}
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

Der Ausdruck  $\ln \frac{\rho}{\sigma^3}$  bleibt also, wie die thermodynamische Entropie  $s$  des Gases, entlang von Stromlinien konstant (vgl. Abschnitt 2.33). Die Benutzung des Druckanalogons  $\pi = \frac{1}{3} \rho \sigma^2$  liefert:

$$\begin{aligned}
 \text{const.} &= \ln \frac{\rho}{\sigma^3} = \ln \frac{\rho}{(3\pi \rho^{-1})^{\frac{3}{2}}} = \ln \left( \frac{1}{3} \rho^{1+\frac{3}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} \right) \\
 \Rightarrow \text{const.} &= \rho^{\frac{5}{2}} \pi^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \pi^{\frac{3}{2}} \propto \rho^{\frac{5}{2}} \Rightarrow \pi \propto \rho^{\frac{5}{3}}
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

Das entspricht genau dem isentropischen Zusammenhang zwischen Druck und Dichte beim Gas (für  $\gamma = \frac{5}{3}$ ), so wie in Abschnitt 2.2.4 beschrieben. Zu beachten ist, dass dieser Zusammenhang nicht nur ein Ergebnis des Analogieschlusses zur Gasdynamik ist, sondern auch direkt aus den Gleichungen hergeleitet wird. Er ist somit eine weitere Folge der lokalen Maxwellverteilung.

Es soll noch einmal betont werden, dass es sich bei  $\pi = \rho \sigma_r^2$  nicht um einen wirklichen Druck handelt, da die Teilchen sich weiter kollisionsfrei bewegen. Jedoch wird durch die Annahme der lokalen Gaussverteilung die Dynamik der dunklen Materie identisch zu der eines idealen Gases mit einem Adiabatenexponenten von  $\gamma = \frac{5}{3}$ .



# Kapitel 3

## Benutzte Algorithmen

### 3.1 Das Riemann-Problem für die Euler-Gleichungen

In differentieller Form lauten die eindimensionalen Euler-Gleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (3.1)$$

Zusammen mit den Anfangsbedingungen

$$\mathbf{Q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L & \text{falls } x < 0 \\ \mathbf{Q}_R & \text{falls } x > 0 \end{cases} \quad (3.2)$$

bilden sie das Riemann-Problem. Eine anschauliche Variante des Riemann - Problems ist das *Shock-Tube-Problem*, bei dem in einem Rohr zwei Fluide mit unterschiedlicher Dichte und Druck durch eine Wand getrennt sind. Das Shock-Tube-Problem beschreibt nun die Dynamik nach dem Entfernen dieser Wand. Beim allgemeineren Riemann-Problem können sich die beiden Anfangszustände in allen Größen unterscheiden, also auch in ihren mittleren Geschwindigkeiten.

Zur Berechnung des Riemann-Problems erweist es sich als sinnvoll, anstatt der konservativen Variablen die primitiven Variablen zu verwenden. Die Gleichungen vereinfachen sich so beträchtlich. Grundlage der folgenden Herleitung ist das in dem Buch von Eleuterio Toro [17, Kapitel 4] beschriebene Vorgehen.

Das Riemann-Problem besitzt eine analytische Lösung, die mit Hilfe der in Kapitel 2.2 vorgestellten Gleichungen berechnet werden kann. Die Lösung besteht aus drei elementaren Wellen, die mit den Eigenwerten  $\lambda_i$  zusammenhängen. Diese Wellen haben ihren Ursprung in der anfänglichen Unstetigkeit und breiten sich entlang der zu den Eigenwerten gehörenden Charakteristiken aus (vgl. Abb. 3.1.1). Die mittlere Welle, die zum Eigenwert  $\lambda_2 = u$  gehört, nennt man Kontakt-Unstetigkeit (*contact discontinuity*). Es handelt sich um eine transversale Unstetigkeit. Bei den anderen beiden Wellen handelt es sich, je nach Anfangsbedingung, um Stoßwellen oder Verdünnungswellen. Die Welle zum Eigenwert  $\lambda_1 = u - a$  wird im folgenden auch als linke, die zum Eigenwert  $\lambda_3 = u + a$  als rechte Welle bezeichnet.

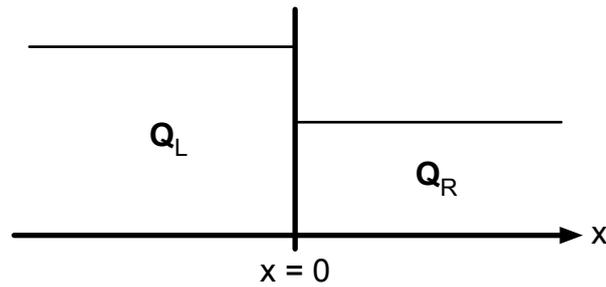


Abbildung 3.1: Riemann-Problem

Die Gesamtlösung setzt sich nun aus diesen drei Wellen zusammen. Sie hängt nur von  $x/t$  ab. Daher erhält man die Lösung für einen beliebigen Zeitpunkt aus einem anderen durch einfache Multiplikation. Diese drei Wellen trennen vier Gebiete voneinander, den linken und den rechten Anfangszustand, sowie die Region links und rechts von der Kontakt-Unstetigkeit. Die auf die letzten beiden Gebiete bezogenen Größen sind im folgenden durch einen Stern ( $\star$ ) gekennzeichnet.

Der Verlauf der Zustandsgrößen an den Wellen wird nun einzeln besprochen.

### 3.1.1 Kontakt-Unstetigkeit

Für die Kontakt-Unstetigkeit gelten folgende Bedingungen:

- Die Rankine-Hugoniot Bedingung:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_r) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_l) = S_i (\mathbf{Q}_r - \mathbf{Q}_l) \quad (3.3)$$

- Die Konstanz der allgemeinen Riemann-Invarianten über die Welle.
- Die Parallelität der Charakteristiken

$$\lambda_2(\mathbf{Q}_l) = \lambda_2(\mathbf{Q}_r) = S_2 \quad (3.4)$$

( $S_2$  ist die Geschwindigkeit der Welle)

Aus der Konstanz der allgemeinen Riemann-Invarianten folgt für die Sprünge in den primitiven Größen:

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{du}{0} = \frac{dp}{0} \quad (3.5)$$

Dies kann nur gelten, wenn  $du = 0$  und  $dp = 0$  gilt. Mittlere Geschwindigkeit und Druck bleiben also über die Kontakt-Unstetigkeit konstant. Somit gibt es in der Stern-Region nur eine mittlere Geschwindigkeit  $u_\star$  und einen Druck  $p_\star$ . Allein bei der Dichte muss noch zwischen  $\rho_{\star L}$  und  $\rho_{\star R}$  unterschieden werden.

Im weiteren werden nun (jeweils für eine linke oder rechte Verdünnungs- bzw. Stoßwelle) Ausdrücke für  $u_\star$  hergeleitet, die nur noch von  $p_\star$  sowie den Anfangszuständen abhängen.

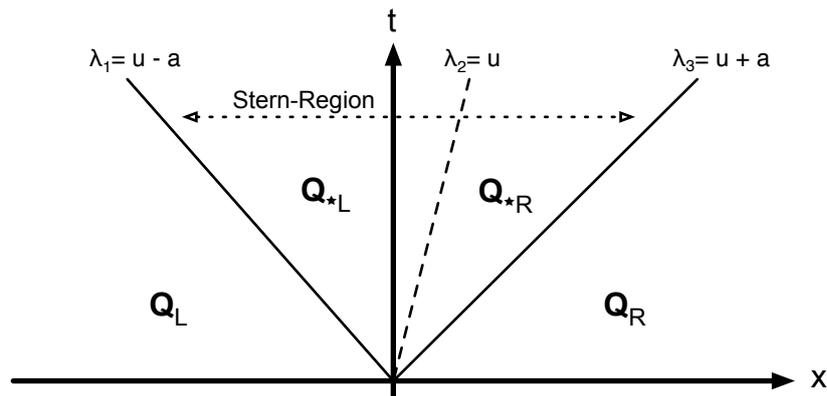


Abbildung 3.2: Verschiedene Gebiete beim Riemann-Problem

Aus diesen kann dann iterativ  $u_*$  und  $p_*$  ermittelt werden. Abschließend können dann aus diesen Größen alle anderen Größen bestimmt werden.

Aus (3.4) folgt direkt für die Geschwindigkeit der Kontakt-Unstetigkeit  $S_2 = u_{*L} = u_{*R} = u_*$ .

### 3.1.2 Verdünnungswelle

Ist der Druck in der Stern-Region  $p_*$  kleiner als der durch die Anfangsbedingungen gegebene Druck am linken oder rechten Rand, wird die Stern-Region vom Rand durch eine Verdünnungswelle getrennt. Die Gestalt einer Verdünnungswelle bestimmt sich aus der Konstanz der allgemeinen Riemann-Invarianten über die Welle. Diese bestimmen sich in der Entropieformulierung für eine rechte Welle (zum Eigenwert  $\lambda_3 = u + a$ ) zu:

$$\frac{d\rho}{1} = \frac{du}{a/\rho} = \frac{ds}{0} \quad (3.6)$$

Es muss demnach gelten:

$$u - \int \frac{a}{\rho} d\rho = u - \frac{2a}{\gamma - 1} = \text{const.} \quad \text{sowie} \quad s = \text{const.} \quad (3.7)$$

Die Entropie bleibt also über die Welle konstant und man kann, wie in Abschnitt 2.2.4 gezeigt, den Zusammenhang (2.40) zwischen Druck und Dichte benutzen:

$$p = c \cdot \rho^\gamma \quad (3.8)$$

Die Konstante lässt sich aus dem rechten Anfangszustand zu  $c = p_R/\rho_R^\gamma$  bestimmen. Daraus folgt:

$$\rho_{*R} = \rho_R \left( \frac{p_*}{p_R} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3.9)$$

Aus der Konstanz der allgemeinen Riemann-Invarianten folgt weiter:

$$u_R - \frac{2a_R}{\gamma - 1} = u_* - \frac{2a_{*R}}{\gamma - 1} \quad (3.10)$$

Für die Schallgeschwindigkeit  $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  folgt aus (3.9):

$$a_{\star R} = a_R \left( \frac{p_{\star}}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \quad (3.11)$$

Somit erhält man aus (3.10):

$$u_{\star} = u_R + f_R(p_{\star}, r_R, u_R, p_R) \quad (3.12)$$

mit

$$f_R(p_{\star}, r_R, u_R, p_R) = \frac{2 a_R}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_{\star}}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) \quad (3.13)$$

Für eine linke Verdünnungswelle lauten die allgemeinen Riemann-Invarianten entsprechend

$$u + \int \frac{a}{\rho} d\rho = u + \frac{2a}{\gamma-1} = \text{const.} \quad \text{sowie} \quad s = \text{const.} \quad , \quad (3.14)$$

man erhält so analog:

$$u_{\star} = u_L - f_L(p_{\star}, r_L, u_L, p_L) \quad (3.15)$$

mit

$$f_L(p_{\star}, r_L, u_L, p_L) = \frac{2 a_L}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_{\star}}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) \quad . \quad (3.16)$$

Eine rechte Verdünnungswelle (zum Eigenwert  $\lambda_3 = u + a$ ) wird von zwei schwachen Unstetigkeiten begrenzt, die *Head* und *Tail* genannt werden. Diese bewegen sich folglich mit den Geschwindigkeiten:

$$S_{HR} = \lambda_3(\mathbf{Q}_R) = u_R + a_R \quad \text{bzw.} \quad S_{TR} = \lambda_3(\mathbf{Q}_{\star R}) = u_{\star} + a_{\star R} \quad . \quad (3.17)$$

Die Lösung setzt sich nun wie folgt zusammen:

- Links vom Tail aus  $\rho_{\star R}$ ,  $u_{\star}$  und  $p_{\star}$ . Die Dichte berechnet sich über (3.8) zu:

$$\rho_{\star R} = \rho_R \left( \frac{p_{\star}}{p_R} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3.18)$$

- Innerhalb der eigentlichen Welle ergeben sich die primitiven Größen aus den allgemeinen Riemann-Invarianten:

$$u_R - \frac{2 a_R}{\gamma - 1} = u - \frac{2 a}{\gamma - 1} \quad (3.19)$$

Außerdem bewegt sich jeder Punkt der Verdünnungswelle mit

$$\frac{x}{t} = u + a \quad . \quad (3.20)$$

Die Kombination aus (3.19) und (3.20) liefert den kompletten Zustand innerhalb der Verdünnungswelle:

$$\begin{aligned}\rho(x/t) &= \rho_R \left( \frac{2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_R} \left( u_R - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u(x/t) &= \frac{2}{(\gamma+1)} \left( -a_R + \frac{(\gamma-1)}{2} u_R + \frac{x}{t} \right) \\ p(x/t) &= p_R \left( \frac{2}{(\gamma+1)} - \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_R} \left( u_R - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\end{aligned}\quad (3.21)$$

- Rechts vom Head aus dem rechten Anfangszustand  $\rho_R$ ,  $u_R$  und  $p_R$ .

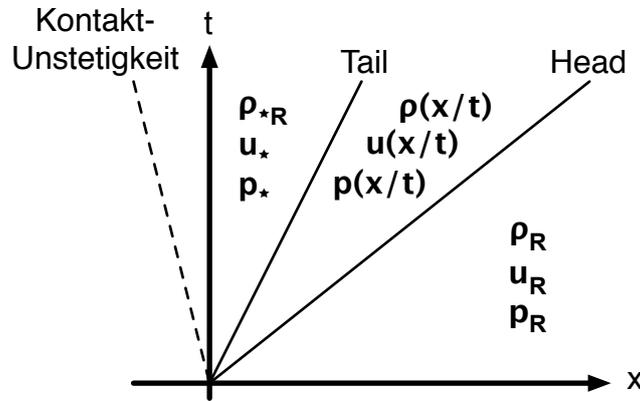


Abbildung 3.3: Aufbau einer rechten Verdünnungswelle

Für die linke Verdünnungswelle (zum Eigenwert  $\lambda_1 = u - a$ ) erhält man analog:

- Geschwindigkeiten von Head und Tail

$$S_{HL} = u_L + a_L \quad \text{bzw.} \quad S_{TL} = u_{*} + a_{*L} \quad (3.22)$$

- Links vom Head:  $\rho_L$ ,  $u_L$  und  $p_L$
- Innerhalb der Welle:

$$\begin{aligned}\rho(x/t) &= \rho_L \left( \frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_L} \left( u_L - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\ u(x/t) &= \frac{2}{(\gamma+1)} \left( a_L - \frac{(\gamma-1)}{2} u_L + \frac{x}{t} \right) \\ p(x/t) &= p_L \left( \frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_L} \left( u_L - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}\end{aligned}\quad (3.23)$$

- Zwischen Tail und Kontakt-Unstetigkeit:  $\rho_{*L}$ ,  $u_{*}$  und  $p_{*}$  mit

$$\rho_{*L} = \rho_L \left( \frac{p_{*}}{p_L} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \quad (3.24)$$

### 3.1.3 Stoßwelle

Ist der durch die Anfangsbedingungen gegebene Druck am Rand kleiner als der Druck in der Stern-Region, handelt es sich bei der trennenden Welle um eine Stoßwelle. Diese erfüllt die Rankine-Hugoniot-Bedingung. Für eine rechte Stoßwelle (zum Eigenwert  $\lambda_3 = u + a$ ) lautet diese:

$$\mathbf{F}(\mathbf{Q}_R) - \mathbf{F}(\mathbf{Q}_{\star R}) = S_3 (\mathbf{Q}_{\star R} - \mathbf{Q}_R) \quad (3.25)$$

Es ist weiterhin sinnvoll, in ein mit der Stoßwelle mitbewegtes System zu transformieren. Dies erreicht man durch folgende Transformation der mittleren Geschwindigkeiten:

$$\hat{u}_\star = u_\star - S_3 \quad \text{bzw.} \quad \hat{u}_R = u_R - S_3 \quad (3.26)$$

In dem neuen System vereinfacht sich die Rankine-Hugoniot Bedingung zu:

$$\begin{aligned} \rho_{\star R} \hat{u}_\star &= \rho_R \hat{u}_R \\ \rho_{\star R} \hat{u}_\star^2 + p_\star &= \rho_R \hat{u}_R^2 + p_R \\ \hat{u}_\star (\hat{\varepsilon}_{\star R} + p_\star) &= \hat{u}_R (\hat{\varepsilon}_R + p_R) \end{aligned} \quad (3.27)$$

Durch Einsetzen der Gesamtenergie wird aus der dritten Gleichung

$$\rho_{\star R} \hat{u}_\star \left( \frac{1}{2} \hat{u}_\star^2 + \left( \varepsilon_{T\star R} + \frac{p_\star}{\rho_{\star R}} \right) \right) = \rho_R \hat{u}_R \left( \frac{1}{2} \hat{u}_R^2 + \left( \varepsilon_{TR} + \frac{p_R}{\rho_R} \right) \right). \quad (3.28)$$

Aus den anderen beiden Gleichungen ergibt sich:

$$\rho_{\star R} \hat{u}_\star^2 = (\rho_R \hat{u}_R) \hat{u}_\star + p_R - p_\star = (\rho_{\star R} \hat{u}_\star) \frac{\rho_{\star R} \hat{u}_\star}{\rho_R} + p_R - p_\star \quad (3.29)$$

Man erhält weiter:

$$\hat{u}_\star^2 = \left( \frac{\rho_R}{\rho_{\star R}} \right) \left( \frac{p_R - p_\star}{\rho_R - \rho_{\star R}} \right) \quad \text{bzw.} \quad \hat{u}_R^2 = \left( \frac{\rho_{\star R}}{\rho_R} \right) \left( \frac{p_R - p_\star}{\rho_R - \rho_{\star R}} \right) \quad (3.30)$$

Die Kombination von (3.28) und (3.30) führt zu:

$$\varepsilon_{T\star R} - \varepsilon_{TR} = \frac{1}{2} (p_\star + p_R) \left( \frac{\rho_{\star R} - \rho_R}{\rho_{\star R} \rho_R} \right) \quad (3.31)$$

Unter Einbeziehung der Zustandsgleichung für das ideale Gas erhält man den Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Dichten und dem Verhältnis der Drücke über die Stoßwelle:

$$\frac{\rho_{\star R}}{\rho_R} = \frac{\left( \frac{p_\star}{p_R} \right) + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}{\left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{p_\star}{p_R} \right) + 1} \quad (3.32)$$

Führt man den Massenfluss (von außen durch die Stoßwelle)

$$Q_R = -\rho_R \hat{u}_R = -\rho_{\star R} \hat{u}_\star \quad (3.33)$$

ein, folgt aus der zweiten Gleichung von (3.27)

$$-Q_R \hat{u}_\star + p_\star = -Q_R \hat{u}_R + p_R \quad \Rightarrow \quad Q_R = \frac{p_\star - p_R}{\hat{u}_\star - \hat{u}_R} \quad (3.34)$$

Aus (3.26) folgt aber außerdem  $\hat{u}_* - \hat{u}_R = u_* - u_R$ , und somit erhält man:

$$Q_R = \frac{p_* - p_R}{u_* - u_R} \quad \text{bzw.} \quad u_* = u_R + \frac{(p_* - p_R)}{Q_R} \quad (3.35)$$

Über die Beziehungen  $\hat{u}_R = \frac{Q_R}{\rho_R}$  und  $\hat{u}_* = \frac{Q_R}{\rho_{*R}}$  erhält man aus (3.34) einen Ausdruck für  $Q_R$ :

$$Q_R^2 = \frac{p_* - p_R}{\frac{1}{\rho_{*R}} - \frac{1}{\rho_R}} \quad (3.36)$$

Nun kann Gleichung (3.32) benutzt werden, um  $\rho_{*R}$  zu eliminieren. Somit erhält man aus (3.35):

$$u_* = u_R + f_L(p_*, r_R, u_R, p_R) \quad (3.37)$$

mit

$$f_L(p_*, r_R, u_R, p_R) = (p_* - p_R) \left( \frac{A_R}{p_* + B_R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.38)$$

sowie

$$A_R = \frac{2}{(\gamma + 1) \rho_R}, \quad B_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R. \quad (3.39)$$

Handelt es sich nun bei der rechten Welle um eine Stoßwelle, besteht die Lösung rechts der Kontakt-Unstetigkeit aus zwei Regionen:

- Links der Stoßwelle besteht die Lösung aus  $\rho_{*R}$ ,  $u_*$  und  $p_*$ , mit

$$\rho_{*R} = \rho_R \frac{\left( \frac{p_*}{p_R} \right) + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}{\left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{p_*}{p_R} \right) + 1} \quad (\text{siehe (3.32)}) \quad (3.40)$$

- Rechts der Stoßwelle finden sich die Anfangszustände  $\rho_R$ ,  $u_R$  und  $p_R$ .

Die Geschwindigkeit der Stoßwelle ergibt sich aus (3.26) und der Definition des Massenflusses (3.33) zu

$$S_R = u_R + \frac{Q_R}{\rho_R} = u_R + a_R \left[ \frac{(\gamma + 1) p_*}{2\gamma p_R} + \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.41)$$

Für eine linke Stoßwelle (zum Eigenwert  $\lambda_1 = u - a$ ) gilt:

- Links der Stoßwelle:  $\rho_L$ ,  $u_L$  und  $p_L$
- Rechts der Stoßwelle  $\rho_{*L}$ ,  $u_*$  und  $p_*$ , mit

$$\rho_{*L} = \rho_L \frac{\left( \frac{p_*}{p_L} \right) + \left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right)}{\left( \frac{\gamma-1}{\gamma+1} \right) \left( \frac{p_*}{p_L} \right) + 1}. \quad (3.42)$$

- Geschwindigkeit der Stoßwelle:

$$S_L = u_L - \frac{Q_L}{\rho_L} = u_L - a_L \left[ \frac{(\gamma + 1) p_*}{2\gamma p_L} + \frac{(\gamma - 1)}{2\gamma} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.43)$$

### 3.1.4 Die komplette Lösung

Man besitzt nun vier Gleichungen von der Form

$$u_\star = u_{R/L} \pm f_{R/L}(p_\star, r_{R/L}, u_{R/L}, p_{R/L}), \quad (3.44)$$

jeweils für Stoß- bzw. Verdünnungswellen, rechts oder links. Die Funktion  $f$  hängt außer von den Anfangsbedingungen nur von dem Druck  $p_\star$  im mittleren (Stern-)Gebiet ab. Diesen erhält man daher durch iteratives Lösen der Gleichung:

$$0 = f_L(p_\star, r_L, u_L, p_L) + f_R(p_\star, r_R, u_R, p_R) + u_R - u_L. \quad (3.45)$$

Für die Funktion  $f_R$  rechts der Kontakt-Unstetigkeit gilt für  $p_\star \leq p_R$  (Verdünnungswelle).

$$f_R = \frac{2a_R}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_\star}{p_R} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) \quad (3.46)$$

Wenn  $p_\star > p_R$  (Stoßwelle) gilt hingegen

$$f_R = (p_\star - p_R) \left( \frac{A_R}{p_\star + B_R} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad A_R = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \quad B_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R \quad (3.47)$$

Links der Kontakt-Unstetigkeit gilt analog

$$f_L = \frac{2a_L}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{p_\star}{p_L} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right) \quad (3.48)$$

für  $p_\star \leq p_L$  (Verdünnungswelle) und

$$f_L = (p_\star - p_L) \left( \frac{A_L}{p_\star + B_L} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{mit} \quad A_L = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_L}, \quad B_L = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_L. \quad (3.49)$$

für  $p_\star > p_L$  (Stoßwelle).

Mit  $p_\star$  lässt sich anschließend die mittlere Geschwindigkeit in der Stern-Region  $u_\star$  aus dem Zusammenhang

$$u_\star = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}(f_L - f_R) \quad (3.50)$$

(folgt direkt aus (3.44)) berechnen.

Die restlichen Größen lassen sich nun gemäß der Formeln in den vorhergehenden Abschnitten berechnen. Zur Zusammensetzung der gesamten Lösung müssen auch die Geschwindigkeiten der einzelnen Wellen  $S_{R/L}$  bzw.  $S_{TR/L}$  und  $S_{HR/L}$  bestimmt werden. Letztendlich besitzt man eine vollständige Beschreibung des Systems, um zu jedem Zeitpunkt an jedem Ort alle das Gas beschreibende Größen berechnen zu können.

Ein Computerprogramm, das für ein gegebenes Riemann-Problem die vorgestellten Rechenschritte durchführt und somit die vollständige Lösung ermittelt, bezeichnet man als *Riemann-Solver*. Zusätzlich zu den hier vorgestellten Rechnungen enthält es noch ein Iterationschema zur Berechnung von  $p_\star$ . Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Riemann-Solver wurde ein Newton-Raphson Schema verwendet. Er wird in Abschnitt 5.2 erläutert.

### 3.2 Die Methode nach Godunow

Zur numerischen Intergration von Erhaltungsgleichungen (wie der Eulergleichungen) mit Anfangsbedingungen wurde von Godunow 1959 [4] ein spezielles Verfahren vorgeschlagen. Es handelt es sich dabei um eine Variante der Methode der finiten Volumen. Zunächst werden, wie schon zuvor, nur die quellenfreien, eindimensionalen, konservativen Eulergleichungen betrachtet. Sie lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (3.51)$$

Hierbei sind die konservativen Größen und die zugehörigen Flüsse wie in Abschnitt 2.2 definiert. Das Integrationsgebiet wird nun in einzelne Zellen der Größe  $\Delta x$  geteilt, welche dann im folgenden durch den Index  $i$  unterschieden werden. In jeder Zelle werden Durchschnittsgrößen über den Zusammenhang

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \mathbf{Q}_i^{n+1}(x', t^{n+1}) dx \quad (3.52)$$

definiert. In erster Ordnung stellt sich die Zeitentwicklung dieser Variablen innerhalb eines Zeitschrittes von  $t^n$  nach  $t^{n+1} = t^n + \Delta t$  dann wie folgt dar:

$$\bar{\mathbf{Q}}_i^{n+1} = \bar{\mathbf{Q}}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i-1/2} - \mathbf{F}_{i+1/2}) \quad (3.53)$$

Die Flüsse  $\mathbf{F}_{i-1/2}(\mathbf{Q}_{i-1/2}, t)$  und  $\mathbf{F}_{i+1/2}(\mathbf{Q}_{i+1/2}, t)$  sind die Flüsse an den beiden Rändern der Zelle  $i$ . Durch Einführen der Durchschnittsvariablen, die innerhalb einer Zelle konstant sind, wird aus den (stückweise) glatten Funktionen  $\mathbf{Q}$  eine Stufenfunktion  $\bar{\mathbf{Q}}$ , die jeweils an der Zellenrändern unstetig ist.

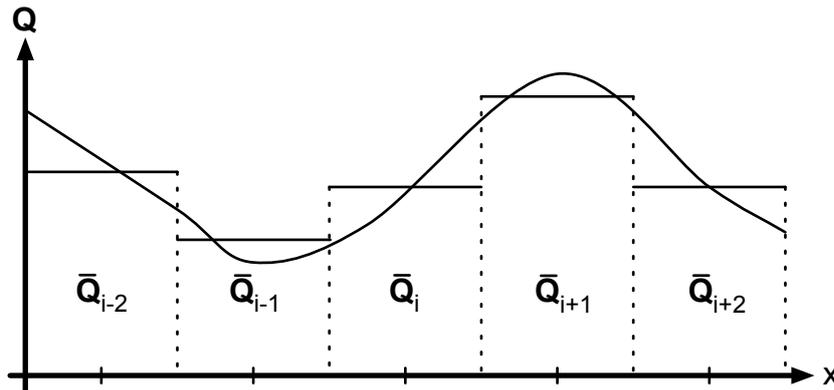


Abbildung 3.4: Die Funktionen  $\mathbf{Q}$  werden durch die stückweise stetigen Funktionen  $\bar{\mathbf{Q}}$  ersetzt

An diesen Stellen liegt nun ein Riemann-Problem vor und die Flüsse dort können nun zu jedem Zeitschritt mit Hilfe eines Riemann-Solvers berechnet werden. In herkömmlichen Methoden, wie der einfachen Euler-Integration oder komplizierteren Algorithmen wie nach Lax-Wendroff, müssen zur Lösung partieller Differentialgleichungen immer örtliche Ableitungen berechnet werden. Dies setzt jedoch Stetigkeit voraus. Im Godunow-Schema

wird die Berechnung der örtliche Ableitung nun durch die Lösung des Riemann-Problems ersetzt. Dies hat den großen Vorteil, dass auch unstetige Funktionen  $\mathbf{Q}$  behandelt werden können. Da selbst anfangs stetige Funktionen  $\mathbf{Q}$ , aufgrund der Nichtlinearität der dynamischen Gleichungen, über die Zeit Unstetigkeiten ausbilden können, ist ein solches Verfahren nach Godunow weitaus stabiler als herkömmliche Methoden.

Um die Flüsse  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  zwischen Zelle  $i$  und  $i+1$  zu berechnen, wählt man  $\bar{\mathbf{Q}}_i$  als linken und  $\bar{\mathbf{Q}}_{i+1}$  als rechten Anfangszustand für das Riemann-Problem und berechnet die Lösung an der Stelle  $x/t = 0$  wie in Abschnitt 3.1 gezeigt. Hierzu ist jedoch zunächst die Berechnung der kompletten Wellenstruktur der Lösung notwendig, da ansonsten keine Aussage darüber getroffen werden kann, in welchem der in Abschnitt 3.1.4 vorgestellten Bereiche der Punkt  $x/t = 0$  liegt. Mit den so ermittelten Größen können die Flüsse über

$$\mathbf{F}_{i+1/2} = \begin{pmatrix} \rho(0) u(0) \\ \rho(0) u(0)^2 + p(0) \\ u(0) \left( \frac{1}{2} \rho(0) u(0)^2 + \frac{\gamma}{\gamma-1} p(0) \right) \end{pmatrix} \quad (3.54)$$

leicht berechnet werden. Da die Lösung des Riemann-Problems selbstähnlich ist, das heißt mit der Zeit nur gestreckt wird, ist die Lösung bei  $x/t = 0$  konstant. Die Flüsse  $\mathbf{F}_{i+1/2}$  sind somit unabhängig von  $t$  und sie ändern sich innerhalb des Zeitschritts von  $n$  nach  $n+1$  nicht.

### 3.2.1 Zeitschritte

Die Größe des Zeitschrittes  $\Delta t$  kann über die CFL-Bedingung (benannt nach den Mathematikern Richard Courant, Kurt Friedrichs und Hans Lewy, siehe auch [13, S. 827f]) berechnet werden:

$$\frac{U \Delta t}{\Delta x} \leq 1 \quad (3.55)$$

Hierbei ist  $U$  die Geschwindigkeit mit der sich wellenartige Störungen im Raum ausbreiten. Im allgemeinen kann die CFL-Bedingung für einen bestimmten Algorithmus über eine von-Neumann-Stabilitätsanalyse gewonnen werden [13, S. 827f]. Übertragen in das Godunow-Schema impliziert die CFL-Bedingung, dass innerhalb eines Zeitschrittes die Wellen, aus denen sich die Lösung des Riemann-Problems zusammensetzt, sich maximal über eine Zelle ausbreiten dürfen.

Daraus lässt sich nun der Zeitschritt zu

$$\Delta t = C_{cfl} \frac{\Delta x}{S_{max}} \quad \text{mit } 0 \leq C_{cfl} \leq 1 \quad (3.56)$$

bestimmen. Die maximale Wellengeschwindigkeit  $S_{max}$  ist die Geschwindigkeit der schnellsten Welle in allen zum Zeitschritt gelösten Riemann-Problemen. Die CFL-Zahl  $C_{cfl}$  ist zwischen Null und Eins zu wählen. Mit höherer CFL-Zahl steigt  $\Delta t$  und somit sind dann selbstverständlich weniger Zeitschritte nötig.

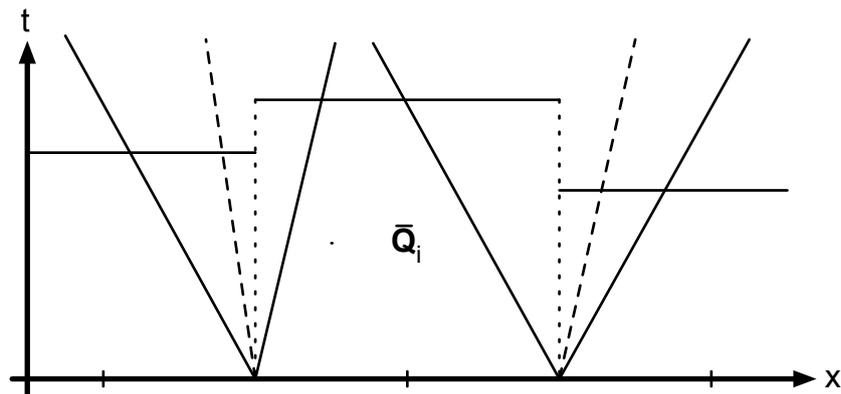


Abbildung 3.5: Die Wellen der Riemann-Probleme im Godunow-Schema dürfen innerhalb eines Zeitschrittes nicht die übernächste Zelle erreichen.

### 3.2.2 Randbedingungen

Ein weiterer großer Vorteil der Godunow-Methode ist die relativ einfache Implementierung von Randbedingungen. Zu ihrer Berechnung werden fiktive Zellen jenseits der Ränder definiert. Zwischen diesen *Geister-Zellen* mit Index  $I + 1$  ( $I$  ist die Anzahl der regulären Zellen) bzw. 0 und den eigentlichen Randzellen  $I$  bzw. 1 findet sich wieder ein Riemann-Problem, welches wie gewohnt gelöst wird. Die Größen in den Geister-Zellen hängen davon ab, ob es sich um *reflektierende* oder *transmittierende* Ränder handelt.

Reflektierende Randbedingungen kann man sich als feste, reflektierende Wände vorstellen. Einlaufende Wellen werden von reflektierende Randbedingungen zurückgeworfen und laufen in die entgegengesetzte Richtung weiter. Die angrenzende Geister-Zelle hat dieselbe Dichte und denselben Druck wie die benachbarte Randzelle, aber eine entgegengesetzte mittlere Geschwindigkeit:

$$\mathbf{W}_{I+1} = \begin{pmatrix} \rho_I \\ -u_I \\ p_I \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{W}_0 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ -u_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (3.57)$$

Auch im Zentrum des in dieser Arbeit behandelten kugelsymmetrischen Gebiets findet sich ein solcher Rand wieder. Anschaulich befindet sich neben der innersten Zelle mit  $i = 1$  auf der anderen Seite des Zentrums genau die gleiche Zelle, jedoch mit einer mittleren Geschwindigkeit entgegengesetzten Vorzeichens.

Im Gegensatz dazu lassen transmittierende Randbedingungen einlaufende Wellen passieren, ohne irgendeinen Einfluss auf sie auszuüben. Sie werden durch Geister-Zellen realisiert, die genau den Randzellen entsprechen:

$$\mathbf{W}_{I+1} = \mathbf{W}_I = \begin{pmatrix} \rho_I \\ u_I \\ p_I \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ u_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Die Verwendung transmittierender Randbedingungen ergibt sich aus der Notwendigkeit, das Integrationsgebiet zu begrenzen, obwohl es keine physikalisch ausgezeichneten Grenzen

gibt. In dieser Arbeit wird das Integrationsgebiet vom Übergang in das Vakuum begrenzt. Die transmittierenden Randbedingungen sind nur der Vollständigkeit wegen erwähnt.

### 3.2.3 Vakuum

Die in dieser Arbeit untersuchten polytropen Gaskugeln haben einen endlichen Radius. Es ist deshalb nötig, auch die Grenze zwischen Gas und Vakuum angemessen zu behandeln. Betrachtet man das Riemann-Problem, bei der der rechte Anfangszustand ein Vakuumzustand  $\mathbf{Q}_0 = (0, u_0, 0)$  ist, spricht man vom *Vakuum-Riemann-Problem*:

$$\mathbf{Q}(x, 0) = \begin{cases} \mathbf{Q}_L \neq \mathbf{Q}_0 & \text{falls } x < 0 \\ \mathbf{Q}_0 & \text{falls } x > 0 \end{cases} \quad (3.59)$$

Hier und in Folge wird sich auf ein Vakuum-Riemann-Problem mit einem rechten Vakuumzustand beschränkt, für einen linken Vakuumzustand gelten alle Aussagen analog.

Eine Stoßwelle kann nicht in ein Vakuum-Gebiet laufen. Dies lässt sich aus den für Stoßwellen geltenden Rankine-Hugoniot-Bedingungen folgern. Aus (2.42) folgt hier nämlich:

$$\begin{aligned} \rho_\star u_\star - \rho_0 u_0 &= S(\rho_\star - \rho_0) \\ \rho_\star u_\star^2 + p_\star - \rho_0 u_0^2 - p_R &= S(\rho_\star u_\star - \rho_0 u_0) \\ u_\star(\rho_\star \varepsilon_\star + p_\star) - u_0(\rho_0 \varepsilon_0 + p_0) &= S(\rho_\star \varepsilon_\star - \rho_0 \varepsilon_0) \end{aligned} \quad (3.60)$$

(mit dem Index  $\star$  wird hier auf den Zustand links der fraglichen Stoßwelle Bezug genommen). Es folgt weiter mit  $\varepsilon_0 = 0$  und endlichem  $u_0$ :

$$u_L = u_0 = S \quad \text{und} \quad p_L = p_0 \quad (3.61)$$

Letzteres ist für eine Stoßwelle offensichtlich ein Widerspruch. Eine Stoßwelle kann also nicht an das Vakuum grenzen. Dies sind jedoch genau die Eigenschaften einer Kontakt-Diskontinuität. Ihre Geschwindigkeit  $S = u_0$  ist gerade die Ausflussgeschwindigkeit des Gases in das Vakuum. Die Lösung des Vakuum-Riemann-Problems besteht daher nur aus zwei Wellen, der Kontakt-Diskontinuität und einer Verdünnungswelle, zwischen dem linken Anfangszustand und der Kontakt-Diskontinuität.

Verlangt man von der Zustandsgleichung des Gases  $p = p(\rho)$ , dass

$$p(0) = 0 \quad \text{und} \quad p'(0) = 0, \quad \text{sowie} \quad p'(\rho) > 0 \quad \text{und} \quad p''(\rho) > 0, \quad (3.62)$$

dann verschwindet die Schallgeschwindigkeit im Vakuum und daher folgt aus den Riemann-Invarianten an der Kontakt-Diskontinuität

$$u_0 + \frac{2a_0}{\gamma - 1} = u_\star + \frac{2a_\star}{\gamma - 1} \quad (3.63)$$

deren Geschwindigkeit

$$S_{\star L} = u_0 = u_\star + \frac{2a_\star}{\gamma - 1} \quad (3.64)$$

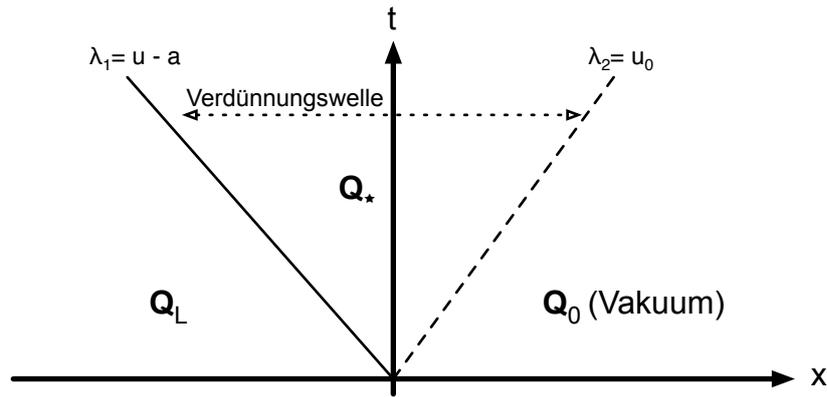


Abbildung 3.6: Verschiedene Gebiete beim Vakuum-Riemann-Problem

Die komplette Lösung des Vakuum-Riemann-Problems lässt sich nun bestimmen:

- Links der Verdünnungswelle ( $\frac{x}{t} < u_L - a_L$ ):  $\mathbf{Q}_L$
- innerhalb der Verdünnungswelle wie in Abschnitt 3.1.2:

$$\begin{aligned}
 \rho(x/t) &= \rho_L \left( \frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_L} \left( u_L - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} \\
 u(x/t) &= \frac{2}{(\gamma+1)} \left( a_L - \frac{(\gamma-1)}{2} u_L + \frac{x}{t} \right) \\
 p(x/t) &= p_L \left( \frac{2}{(\gamma+1)} + \frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)a_L} \left( u_L - \frac{x}{t} \right) \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}}
 \end{aligned} \tag{3.65}$$

- im Vakuum ( $\frac{x}{t} > S_{*L} = u_0$ ):  $\mathbf{Q}_0$

### 3.2.4 Quellen

Bisher wurden nur die quellenfreien Eulergleichungen betrachtet, das vollständige Gleichungssystem

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = \mathbf{S}(\mathbf{Q}) \tag{3.66}$$

enthält jedoch noch den durch Gravitation, Kugelkoordinaten und Kühlung gegebenen Quellterm

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \rho g \\ u \rho g \end{pmatrix} - \frac{2}{r} \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ u(\rho \varepsilon + p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ k \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Zur Lösung dieser Gleichungen im Zeitschritt  $n$  wird für  $\mathbf{Q}^n$  zunächst das homogene (advective) Problem

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{Q} + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\mathbf{Q}) = 0 \quad (3.68)$$

mit der oben erläuterten Methode nach Godunow gelöst, um anschließend mit der erhaltenen Lösung  $\hat{\mathbf{Q}}^n$  über die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{Q}} = \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Q}}) \quad (3.69)$$

die vollständige Lösung  $\mathbf{Q}^{n+1}$  zu bestimmen. Hierfür wird im folgenden eine einfache Integration erster Ordnung nach Euler verwendet:

$$\mathbf{Q}^{n+1} = \hat{\mathbf{Q}}^n + \Delta t \mathbf{S}(\hat{\mathbf{Q}}) \quad (3.70)$$

Die Größe des Zeitschrittes  $\Delta t$  berechnet sich nur aus dem advektiven Problem. Bei zu großen Quellen kann dies zu ungenügender Genauigkeit führen.

# Kapitel 4

## Anfangsverteilung und Kühlfunktion

### 4.1 Anfangsverteilung

#### 4.1.1 Polytrope Anfangsverteilung

Eine gravitativ gebundene Gasverteilung ist genau dann stationär, wenn in der Gleichung für die Impulsdichte Druckgradient und Gravitationsquellterm einander aufheben. Die Gleichung ist dann bei einer anfänglichen mittleren Geschwindigkeit  $u(t = 0) = 0$  identisch Null. Man erhält also:

$$\frac{dp}{dr} = \rho g \quad (4.1)$$

Mit der isentropischen Zustandsgleichung  $p = \kappa \rho^\gamma$ , folgt:

$$g = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{1}{\rho} \frac{d(\kappa \rho^\gamma)}{dr} = \kappa \gamma \rho^{\gamma-2} \frac{d\rho}{dr} \quad (4.2)$$

Man erhält demnach die Differentialgleichung:

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{1}{\gamma \kappa} g \rho^{2-\gamma} \quad (4.3)$$

Zusammen mit der Poisson-Gleichung bzw. mit der daraus gewonnenen Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung (2.3)

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) = -4 \pi r^2 G \rho_{\text{Gesamt}} \quad (4.4)$$

bildet sie die Bestimmungsgleichung für die *polytrope Gaskugel*. Es ist zu beachten, dass in einem System aus dunkler Materie und baryonischem Gas sich das Gravitationspotential bzw. die Gravitationsbeschleunigung aus der Summe der Dichte beider Komponenten berechnet und daher in der letzten Gleichung auch die Gesamtdichte steht.

Behandelt man die dunkle Materie, wie in Abschnitt 2.3 gezeigt, analog zu einem Gas mit  $\gamma_d = \frac{5}{3}$ , lässt sich dementsprechend auch eine polytrope Anfangsverteilung finden. Unter Verwendung des Druckanalogons  $\pi = \rho_d \sigma_r^2$  und des isentropischen Zusammenhangs  $\pi = \kappa_d \rho_d^\gamma$  erhält man eine zu (4.3) identische Gleichung als Bestimmungsgleichung für diese polytrope Kugel.

#### 4.1.2 Einheitenlose Größen

Zur numerischen Berechnung der Anfangsverteilung und der anschließenden Dynamik ist es sinnvoll, einheitenlose Größen einzuführen. Hierzu werden spezielle Größen definiert und alle Variablen (wie Radius, Dichte, Druck etc.) als Vielfache dieser absoluten Größen angegeben. Beispielsweise gilt:

$$\begin{aligned} r &= r_0 \tilde{r} \\ u &= u_0 \tilde{u} \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Wählt man diese Größen geschickt, lässt diese Transformation die dynamischen Gleichungen unverändert und andere Gleichungen lassen sich ebenfalls vereinfachen.

Für das vorliegende Problem bietet es sich an, die anfängliche Zentraldichte  $\rho_0$  des Gases als Grundlage zu verwenden. Davon ausgehend wird folgendes Einheitensystem benutzt:

$$\begin{aligned} p_0 &= \kappa_b \rho_0^\gamma \\ u_0 &= \sqrt{p_0 / \rho_0} = \sqrt{\kappa \rho_0^{\gamma-1}} \\ r_0 &= \sqrt{u_0^2 / 4\pi G \rho_0} \\ t_0 &= r_0 / u_0 = 1 / \sqrt{4\pi G \rho_0} \\ g_0 &= r_0 / t_0^2 = u_0^2 / r_0 \\ \varepsilon_0 \rho_0 &= \rho_0 u_0^2 \\ k_0 &= \rho_0 u_0^3 / r_0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Die Einheiten werden so gewählt, dass die Dynamischen Gleichungen nicht ihre Gestalt verändern. Dies wird im folgenden anhand der Gleichungen für das Gas überprüft. Die Gleichungen für die dunkle Materie transformieren sich analog (es muss nur  $p$  durch  $\pi$  ersetzt werden). Für die Kontinuitätsgleichung gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u) + \frac{2\rho u}{r} \\ &= \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\rho} + \frac{\rho_0 u_0}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\rho_0 u_0}{r_0} \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}}{\tilde{r}} \\ &= \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\rho} + \frac{\rho_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\rho_0}{t_0} \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}}{\tilde{r}} \\ &= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} \tilde{\rho} + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}}{\tilde{r}} \end{aligned} \tag{4.7}$$

Die Kontinuitätsgleichung verändert ihre Form demnach nicht. Auch die Gleichung für die

Impulsdichte verändert ihre Form nicht:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial r} (\rho u^2 + p) + \frac{2\rho u^2}{r} + \rho g \\
&= \frac{\rho_0 u_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{1}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\rho_0 u_0^2 \tilde{\rho} \tilde{u}^2 + p_0 \tilde{p}) + \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\tilde{r}} + \rho_0 g_0 \tilde{\rho} \tilde{g} \\
&= \frac{\rho_0 u_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{p}) + \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\tilde{r}} + \rho_0 g_0 \tilde{\rho} \tilde{g} \\
&= \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{p}) + \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\tilde{r}} + \frac{\rho_0 u_0^2}{r_0} \tilde{\rho} \tilde{g} \\
&= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{u}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{\rho} \tilde{u}^2 + \tilde{p}) + \frac{2\tilde{\rho} \tilde{u}^2}{\tilde{r}} + \tilde{\rho} \tilde{g}
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Abschließend wird nun noch die Gleichung für die Energiedichte untersucht:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{\partial}{\partial r} (u (\rho \varepsilon + p)) + \frac{2u (\rho \varepsilon + p)}{r} + \rho u g + k \\
&= \frac{\rho_0 \varepsilon_0}{t_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon}) + \frac{u_0}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{u} (\rho_0 \varepsilon_0 \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + p_0 \tilde{p})) \\
&\quad + \frac{u_0}{r_0} \frac{2\tilde{u} (\rho_0 \varepsilon_0 \tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + p_0 \tilde{p})}{\tilde{r}} + \rho_0 u_0 g_0 \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{g} + k_0 \tilde{k} \\
&= \frac{\rho_0 u_0^3}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\rho_0 u_0^3}{r_0} \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{u} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + \tilde{p})) \\
&\quad + \frac{\rho_0 u_0^3}{r_0} \frac{2\tilde{u} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + \tilde{p})}{\tilde{r}} + \frac{\rho_0 u_0^3}{r_0} \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{g} + \frac{\rho_0 u_0^3}{r_0} \tilde{k} \\
&= \frac{\partial}{\partial \tilde{t}} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon}) + \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{u} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + \tilde{p})) + \frac{2\tilde{u} (\tilde{\rho} \tilde{\varepsilon} + \tilde{p})}{\tilde{r}} + \tilde{\rho} \tilde{u} \tilde{g} + \tilde{k}
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Auch hier ändert sich die Gestalt nicht. Es ist jedoch zu beachten, dass eine phänomenologische Kühl- bzw. Heizfunktion entsprechend umgerechnet werden muss. Die Poisson-Gleichung bzw. die daraus gewonnene Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung vereinfacht sich durch die Transformation in einheitenlose Variablen (ab hier werden die Indizes  $d$  für die dunkle Materie und  $b$  für das baryonische Gas benutzt):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) &= -4\pi G r^2 \rho_{\text{Gesamt}} = -4\pi G r^2 (\rho_d + \rho_b) \\
\Leftrightarrow r_0 g_0 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{g}) &= -4\pi G \rho_0 r_0^2 \tilde{r}^2 (\tilde{\rho}_d + \tilde{\rho}_b) \\
\Leftrightarrow u_0^2 \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{g}) &= -\frac{r_0^2}{t_0^2} \tilde{r}^2 (\tilde{\rho}_d + \tilde{\rho}_b) \\
\Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2 \tilde{g}) &= -\tilde{r}^2 (\tilde{\rho}_d + \tilde{\rho}_b)
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Schlussendlich müssen noch die Bestimmungsgleichungen für die polytropen Verteilungen (4.3) der dunklen Materie und des Gases behandelt werden. Für die anfängliche Verteilung

des Gases gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_b}{dr} &= \frac{1}{\gamma_b \kappa_b} g \rho_b^{2-\gamma_b} \\
\Leftrightarrow \frac{\rho_0 d\tilde{\rho}_b}{r_0 d\tilde{r}} &= \frac{1}{\gamma_b \kappa_b} g_0 \tilde{g} \rho_0^{2-\gamma_b} \tilde{\rho}_b^{2-\gamma_b} \\
\Leftrightarrow \frac{d\tilde{\rho}_b}{d\tilde{r}} &= \frac{1}{\gamma_b} \frac{r_0 u_0^2}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\kappa_b \rho_0^{\gamma_b-1}} \tilde{g} \tilde{\rho}_b^{2-\gamma_b} \\
\Leftrightarrow \frac{d\tilde{\rho}_b}{d\tilde{r}} &= \frac{1}{\gamma_b} \tilde{g} \tilde{\rho}_b^{2-\gamma_b}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Die Bestimmungsgleichung für die anfängliche Verteilung dunkler Materie ist komplizierter, da die die dunkle Materie beschreibenden Größen in einheitenlose Größen, die auf der anfänglichen Verteilung des Gases basieren, umgeschrieben werden müssen. Aus (4.3) folgt so:

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho_d}{dr} &= \frac{1}{\gamma_d \kappa_d} g \rho_d^{2-\gamma_d} \\
\Leftrightarrow \frac{\rho_0 d\tilde{\rho}_d}{r_0 d\tilde{r}} &= \frac{1}{\gamma_d \kappa_d} g_0 \tilde{g} \rho_0^{2-\gamma_d} \tilde{\rho}_d^{2-\gamma_d} \\
\Leftrightarrow \frac{d\tilde{\rho}_d}{d\tilde{r}} &= \frac{1}{\gamma_d} \frac{r_0 u_0^2}{\rho_0} \frac{\rho_0}{\kappa_d \rho_0^{\gamma_d-1}} \tilde{g} \tilde{\rho}_d^{2-\gamma_d} \\
\Leftrightarrow \frac{d\tilde{\rho}_d}{d\tilde{r}} &= \underbrace{\frac{\kappa_b}{\kappa_d} \rho_0^{\gamma_b-\gamma_d}}_{\chi} \frac{1}{\gamma_d} \tilde{g} \tilde{\rho}_d^{2-\gamma_d}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Das Verhältnis  $\chi$  lässt sich mit der anfänglichen zentralen Baryondichte  $\rho_{b,0}$  umformen zu:

$$\chi = \frac{\kappa_b}{\kappa_d} \rho_0^{\gamma_b-\gamma_d} = \frac{\kappa_b}{\kappa_d} \frac{\rho_0^{\gamma_b}}{\rho_0^{\gamma_d}} = \frac{\kappa_b}{\kappa_d} \frac{\rho_0^{\gamma_b}}{\rho_{d,0}^{\gamma_d}} \left( \frac{\rho_{d,0}}{\rho_0} \right)^{\gamma_d} = \frac{p_0}{\pi_0} \left( \frac{\rho_{d,0}}{\rho_0} \right)^{\gamma_d} \tag{4.13}$$

In die Bestimmungsgleichung für die dunkle Materie gehen demnach auch zusätzliche Parameter ein, die die Verhältnisse zwischen den Anfangsdichten der dunklen Materie und des Gases sowie der Geschwindigkeitsdispersion der dunklen Materie und des Gasdruckes abbilden.

Es kann nun sinnvoll sein, zu verlangen, dass die Verteilungen von Gas und dunkler Materie dieselbe räumliche Ausdehnung haben. Aus dieser Forderung lässt sich das Verhältnis  $\chi$  ableiten. Hierzu werden zunächst die Bestimmungsgleichungen von dunkler Materie und Gas umgeformt:

$$\begin{aligned}
\frac{d\tilde{\rho}_d}{d\tilde{r}} &= \frac{\chi}{\gamma_d} \tilde{g} \tilde{\rho}_d^{2-\gamma_d} \Rightarrow \tilde{g} = \frac{\gamma_d}{\chi} \frac{d\tilde{\rho}_d}{d\tilde{r}} \tilde{\rho}_d^{\gamma_d-2} \\
\frac{d\tilde{\rho}_b}{d\tilde{r}} &= \frac{1}{\gamma_b} \tilde{g} \tilde{\rho}_b^{2-\gamma_b} \Rightarrow \tilde{g} = \gamma_b \frac{d\tilde{\rho}_b}{d\tilde{r}} \tilde{\rho}_b^{\gamma_b-2}
\end{aligned} \tag{4.14}$$

Offensichtlich gilt:

$$\gamma_b \frac{d\tilde{\rho}_b}{d\tilde{r}} \tilde{\rho}_b^{\gamma_b-2} = \frac{\gamma_d}{\chi} \frac{d\tilde{\rho}_d}{d\tilde{r}} \tilde{\rho}_d^{\gamma_d-2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_b}{\gamma_b-1} \frac{d}{d\tilde{r}} \tilde{\rho}_b^{\gamma_b-1} = \frac{\gamma_d}{\gamma_d-1} \frac{1}{\chi} \frac{d}{d\tilde{r}} \tilde{\rho}_d^{\gamma_d-1} \quad (4.15)$$

Eine örtliche Integration liefert nun:

$$\frac{\gamma_b}{\gamma_b-1} \tilde{\rho}_b^{\gamma_b-1} = \frac{\gamma_d}{\gamma_d-1} \frac{1}{\chi} \tilde{\rho}_d^{\gamma_d-1} + \text{const.} \quad (4.16)$$

Verlangt man nun, dass die beiden Dichteverteilungen beim gleichen Radius Null werden, muss die Konstante verschwinden. Dann folgt:

$$\chi = \frac{\gamma_d \gamma_b - 1}{\gamma_b \gamma_d - 1} \frac{\tilde{\rho}_d^{\gamma_d-1}}{\tilde{\rho}_b^{\gamma_b-1}} \quad (4.17)$$

Da  $\chi$  konstant ist, können für  $\tilde{\rho}_d$  und  $\tilde{\rho}_b$  die einheitenlosen Zentraldichten eingesetzt werden und so aus diesen das Verhältnis  $\chi$  bestimmt werden.

Die in (4.6) eingeführten Grundgrößen lassen sich für einen Galaxienhalo abschätzen. Der Radius  $R$  und die Masse  $M$  eines einer kleinen Galaxie entsprechenden Halos betragen:

$$\begin{aligned} R &\approx 10 \text{ kpc} = 10^4 \cdot 3,1 \cdot 10^{18} \text{ cm} = 3,1 \cdot 10^{23} \text{ cm} \\ M &\approx 10^{11} \text{ Sonnemassen} = 10^{11} \cdot 2 \cdot 10^{33} \text{ g} = 2 \cdot 10^{44} \text{ g} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für einen Kugelsternhaufen gelten folgende Werte:

$$\begin{aligned} R &\approx 100 \text{ pc} = 10^2 \cdot 3,1 \cdot 10^{18} \text{ cm} = 3,1 \cdot 10^{20} \text{ cm} \\ M &\approx 10^6 \text{ Sonnemassen} = 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{33} \text{ g} = 2 \cdot 10^{39} \text{ g} \end{aligned} \quad (4.19)$$

Mit dem Radius des Halos und der Masse des Gases in einheitenlosen Größen  $\tilde{R}$  und  $\tilde{M}_G$  bedeutet dies für  $r_0$  und  $\rho_0$ :

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{R}{\tilde{R}} \\ \rho_0 &= \frac{M}{\tilde{M}_G} \frac{1}{r_0^3} = \frac{M}{\tilde{M}_G} \left( \frac{\tilde{R}}{R} \right)^3 \end{aligned} \quad (4.20)$$

### 4.1.3 Berechnung der Anfangskonfiguration

Die numerische Berechnung der Anfangskonfiguration lässt sich sehr gut mit Hilfe einer Runge-Kutta-Integration durchführen. Hierfür werden die zu Grunde liegenden Gleichungen in die Form  $\mathbf{y}'(x) = f(\mathbf{y}, x)$  gebracht. Es wird daher substituiert:

$$x = \tilde{r} \quad ; \quad y_1 = \tilde{\rho}_d \quad ; \quad y_2 = \tilde{\rho}_b \quad \text{und} \quad y_3 = \tilde{r}^2 \tilde{g} \quad (4.21)$$

Damit folgen aus (4.10), (4.11) und (4.12):

$$\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dr} &= \frac{\chi}{\gamma_d} \frac{y_3}{x^2} y_1^{2-\gamma_d} \\
\frac{dy_2}{dr} &= \frac{1}{\gamma_b} \frac{y_3}{x^2} y_2^{2-\gamma_b} \\
\frac{dy_2}{dr} &= -x^2 (y_1 + y_2)
\end{aligned} \tag{4.22}$$

In Abb. 4.1.3 ist eine nach diesen Gleichungen berechnete Anfangskonfiguration abgebildet. Das Programm hierzu wird in Abschnitt 5.1 beschrieben. Als Startwerte für die Runge-Kutta-Intergration wurden verwendet:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}_{0,b} &= 1 \\
\tilde{\rho}_{0,d} &= 1,54 \\
\gamma_b &= 4/3 \\
\gamma_d &= 5/3
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Das Verhältnis der Dichten wurde so gewählt, das zwischen den Gesamtmassen von dunkler Materie und Baryonen das kosmologische Verhältnis von 4:1 besteht (vgl. [16]). Außerdem ist  $\chi$  so gewählt, wie in (4.17) beschrieben. Für  $\tilde{R}$  und  $\tilde{M}_G$  erhält man in dieser Anfangskonfiguration:

$$\begin{aligned}
\tilde{R} &= 5.25 \\
\tilde{M}_G &= 2.62
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Gemäß der im vorherigen Abschnitt beschriebenen Abschätzung für eine Galaxie ergeben sich die absoluten Grundgrößen somit zu:

$$\begin{aligned}
r_0 &= 5,9 \cdot 10^{21} \text{ cm} \\
\rho_0 &= 3,6 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3} \\
t_0 &= 5,8 \cdot 10^{13} \text{ s} \sim 600000 \text{ Jahre} \\
u_0 &= 10^8 \text{ cm s}^{-1}
\end{aligned} \tag{4.25}$$

## 4.2 Analyse der stationären Lösungen

In diesem Abschnitt soll nun überprüft werden, wie eine stationäre Dichteverteilung (z.B. die polytrope kugelsymmetrische Verteilung) auf kleine Störungen reagiert. Hierbei wird in erster Ordnung untersucht, ob sie um den stabilen Zustand oszilliert oder instabil auseinander läuft bzw. zusammenstürzt.

Ausgangsbasis für die folgenden Betrachtungen sind die Euler-Gleichungen in der primitiven Form. Zusätzlich wird vorausgesetzt, dass in der ungestörten Verteilung ein isentropischer Zusammenhang zwischen Druck und Dichte  $p = \kappa \rho^\gamma$  besteht (siehe auch Kapitel

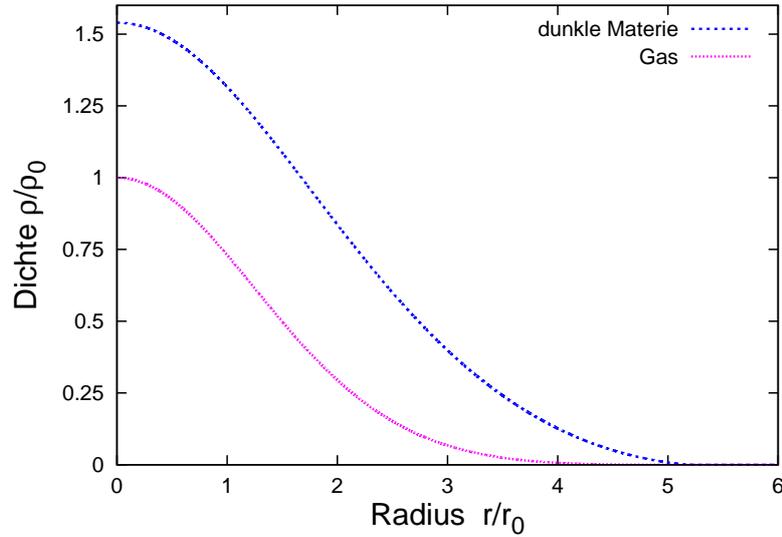


Abbildung 4.1: Anfangskonfiguration für  $\gamma_b = 1.33$  und  $\rho_{0,d} = 1.53$

2.33). Diese Voraussetzung liegt auch der in Abschnitt 4.1.1 besprochenen polytropen kugelsymmetrischen Verteilung zugrunde. Das Gleichungssystem lautet dann:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \rho + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho u r^2) \\
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} u + u \frac{\partial}{\partial r} u + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - g \\
 p &= \kappa \rho^\gamma
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Die Gravitationsbeschleunigung bestimmt sich aus

$$\frac{\partial}{\partial r} (r^2 g) = -4\pi G r^2 \rho \tag{4.27}$$

mit der Definition der eingeschlossenen Masse  $m$  im Radius  $r$  über  $\frac{\partial}{\partial r} m = 4\pi r^2 \rho$  zu:

$$g = -\frac{G m}{r^2} \tag{4.28}$$

Um dieses System nun störungstheoretisch zu behandeln, wird die Dichte in eine stationäre Lösung und eine dagegen kleine Störung aufgeteilt. Die Störungsgrößen werden ihrerseits noch einmal in einen orts- und einen zeitabhängigen Anteil aufgespalten. Auch die mittlere Geschwindigkeit wird als das Produkt einer zeit- und einer ortsabhängigen Störung ausgedrückt.

$$\begin{aligned}
 \rho &= \rho_0 (1 + \delta(t) \Delta(r)) \\
 u &= v(t) V(r)
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Setzt man dies nun in die obige Definition der eingeschlossenen Masse ein, so erkennt man, dass auch diese sich nun in einen ungestörten Anteil und eine Störung separiert:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}m &= 4\pi r^2\rho_0 + 4\pi r^2\rho_0\delta(t)\Delta(r) \\ \Rightarrow m &= m_0 + \delta(t)\underbrace{\int 4\pi r^2\rho_0\Delta(r)dr}_{=\mu(r)}\end{aligned}\quad (4.30)$$

Nun wird zunächst die Kontinuitätsgleichung im gestörten System betrachtet. Die Terme, in denen die Störungen nichtlinear sind, z. B.  $\delta\Delta vV$  verschwinden in der hier betrachteten Näherung erster Ordnung.

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_0(1+\delta(t)\Delta(r))\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0(1+\delta(t)\Delta(r))v(t)V(r)r^2\right) \\ &= \rho_0\Delta(r)\frac{\partial}{\partial t}\delta(t) + \frac{v(t)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0V(r)r^2\right) \\ &= \delta\dot{(t)} + v(t)\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{1}{\rho_0\Delta(r)}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0V(r)r^2\right)}_{=A^{-1}=\text{const.}}\end{aligned}\quad (4.31)$$

Der hier mit  $A$  bezeichnete Term ist offensichtlich zeitlich konstant, er ist jedoch auch räumlich konstant, da sonst auch  $\delta$  ortsabhängig wäre, was es jedoch definitionsgemäß nicht sein soll. Es gilt demnach:

$$v(t) = -A\delta\dot{(t)}\quad (4.32)$$

Durch Umformung der Definition von  $A$  erhält man:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho_0V(r)r^2\right) &= \frac{\rho_0\Delta(r)r^2}{A} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial r}\mu(r) \\ \Rightarrow \rho_0V(r)r^2 &= \frac{1}{4\pi}\frac{1}{A}\mu(r) + \text{const.}\end{aligned}\quad (4.33)$$

Die Integrationskonstante muss jedoch verschwinden, da bei  $r=0$  beide Seiten der Gleichung Null werden. Es gilt somit:

$$V(r) = \frac{1}{A}\frac{\mu(r)}{4\pi\rho_0r^2}\quad (4.34)$$

Als nächstes wird die Gleichung für die mittlere Geschwindigkeit betrachtet:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t}v(t)V(r) + \frac{1}{\rho_0(1+\delta(t)\Delta(r))}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Gm_0}{r^2} + \frac{G\delta(t)\mu(r)}{r^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}v(t)V(r) + \frac{1-\delta(t)\Delta(r)}{\rho_0\left(1-(\delta(t)\Delta(r))^2\right)}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Gm_0}{r^2} + \frac{G\delta(t)\mu(r)}{r^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial t}v(t)V(r) + \frac{1-\delta(t)\Delta(r)}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{Gm_0}{r^2} + \frac{G\delta(t)\mu(r)}{r^2}\end{aligned}\quad (4.35)$$

Der gestörte Druck lässt sich nach der Dichte entwickeln, man erhält dann in erster Ordnung:

$$p(\rho_0 + \rho_0 \delta(t)\Delta(r)) = p_0 + \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \delta(t) \Delta(r) = p_0 + c^2(r) \rho_0 \delta(t) \Delta(r) \quad (4.36)$$

Hier bezeichnet  $c = \sqrt{\frac{\partial p_0}{\partial \rho_0}}$  die ungestörte Schallgeschwindigkeit. Eingesetzt in die Euler-Gleichung ergibt dies:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} v(t)V(r) + \frac{1 - \delta(t)\Delta(r)}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{1 - \delta(t)\Delta(r)}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) \rho_0 \delta(t)\Delta(r)) \\ &\quad + \frac{G m_0}{r^2} + \frac{G \delta(t)\mu(r)}{r^2} \end{aligned} \quad (4.37)$$

Im stationären Fall gilt  $\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} = -\frac{G m_0}{r^2}$  und daher folgt:

$$0 = V(r) \frac{\partial}{\partial t} v(t) - \frac{\delta(t)\Delta(r)}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) \rho_0 \delta(t)\Delta(r)) + \frac{G \delta(t)\mu(r)}{r^2} \quad (4.38)$$

Aus (4.32) folgt  $\dot{v}(t) = -A \ddot{\delta}(t)$  und so erhält man:

$$0 = -A V(r) \ddot{\delta}(t) - \frac{\delta(t)\Delta(r)}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\delta(t)}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) \rho_0 \Delta(r)) + \frac{G \delta(t)\mu(r)}{r^2} \quad (4.39)$$

Nun wird noch  $V(r)$  gemäß (4.34) ersetzt und man erhält:

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\mu(r)}{4\pi r^2 \rho_0} \ddot{\delta}(t) - \frac{\delta(t)\Delta(r)}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{\delta(t)}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) \rho_0 \Delta(r)) + \frac{G \delta(t)\mu(r)}{r^2} \\ &= -\ddot{\delta}(t) + \underbrace{\left[ -\frac{4\pi r^2}{\mu(r)} \Delta(r) \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{4\pi r^2}{\mu(r)} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) \rho_0 \Delta(r)) + 4\pi \rho_0 G \right]}_{=-B} \delta(t) \end{aligned} \quad (4.40)$$

Aus den selben Gründen wie bei der Konstanten  $A$  muss auch  $B$  örtlich und zeitlich konstant sein. Man erhält folgende Schwingungsgleichung:

$$\ddot{\delta}(t) + B \delta = 0 \quad (4.41)$$

Für ein positives  $B$  oszilliert der zeitliche Anteil der Störung  $\delta(t)$  mit der Zeit und die stationäre Grundlösung ist somit zeitlich stabil. Für  $B$  gilt:

$$\begin{aligned} B &= \frac{4\pi r^2}{\mu(r)} \Delta(r) \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{4\pi r^2}{\mu(r)} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) \rho_0 \Delta(r)) - 4\pi \rho_0 G \\ &= \frac{4\pi r^2}{\mu(r)} \Delta(r) \frac{\partial p_0}{\partial r} - \frac{1}{\mu(r)} \frac{\partial}{\partial r} (c^2(r) 4\pi r^2 \rho_0 \Delta(r)) \\ &\quad + \frac{1}{\mu(r)} \frac{2}{r} 4\pi r^2 \rho_0 \Delta(r) c^2(r) - 4\pi \rho_0 G \\ &= -\frac{1}{\mu(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left( c^2(r) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{\mu(r)} \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} \left( \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_0}{\partial r} + \frac{2 c^2(r)}{r} \right) - 4\pi \rho_0 G \end{aligned} \quad (4.42)$$

Der Druckgradient lässt sich über  $\frac{\partial p_0}{\partial r} = \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = c^2(r) \frac{\partial \rho_0}{\partial r}$  weiter umformen. Außerdem lässt sich mit Hilfe des isentropen Zusammenhangs zwischen Druck und Dichte nun die Schallgeschwindigkeit angeben:

$$\begin{aligned} p_0 = \kappa \rho_0^\gamma &\Rightarrow c^2(r) = \frac{\partial p_0}{\partial \rho_0} = \kappa \gamma \rho_0^{\gamma-1} \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial r} c^2(r) = \kappa \gamma (\gamma - 1) \rho_0^{\gamma-2} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} = \frac{\gamma - 1}{\rho_0} c^2(r) \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Nun lässt sich folgende Umformung durchführen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left( c^2(r) \frac{\partial}{\partial r} \mu(r) \right) &= \frac{\partial c^2(r)}{\partial r} \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} + c^2(r) \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} \\ &= \frac{\gamma - 1}{\rho_0} c^2(r) \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} + c^2(r) \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} \end{aligned} \quad (4.44)$$

und man erhält aus (4.42):

$$\begin{aligned} B &= -\frac{c^2(r)}{\mu(r)} \frac{\gamma - 1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} - \frac{c^2(r)}{\mu(r)} \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} \\ &\quad + \frac{1}{\mu(r)} \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} \left( \frac{c^2(r)}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} + \frac{2c^2(r)}{r} \right) - 4\pi \rho_0 G \\ &= -\frac{c^2(r)}{\mu(r)} \left[ \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} + \left( -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{2}{r} + \frac{\gamma - 1}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} \right) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} + \frac{4\pi \rho_0 G}{c^2(r)} \mu(r) \right] \\ &= -\frac{c^2(r)}{\mu(r)} \left[ \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} + \left( \frac{\gamma - 2}{\rho_0} \frac{\partial \rho_0}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} + \frac{4\pi \rho_0 G}{c^2(r)} \mu(r) \right] \\ &= -\frac{c^2(r)}{\mu(r)} \left[ \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} + \left( (\gamma - 2) \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} + \frac{4\pi \rho_0 G}{c^2(r)} \mu(r) \right] \end{aligned} \quad (4.45)$$

Daraus folgt:

$$0 = \frac{\partial^2 \mu(r)}{\partial r^2} + \left( (\gamma - 2) \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) \frac{\partial \mu(r)}{\partial r} + \frac{4\pi \rho_0 G + B}{c^2(r)} \mu(r) \quad (4.46)$$

Diese Differentialgleichung für  $\mu(r)$  ist von der Form

$$f_1(x) y'' + f_2(x) y' + f_3(x) y = 0 \quad (4.47)$$

und kann daher über die Substitution  $\xi(y, x) = y \exp\left(\frac{1}{2} \int f_2 dx\right)$  in

$$\xi'' + I \xi = 0 \quad \text{mit} \quad I = \frac{f_3}{f_1} - \frac{1}{4} \left( \frac{f_2}{f_1} \right)^2 - \frac{1}{2} \left( \frac{f_2}{f_1} \right)' \quad (4.48)$$

überführt werden. Aus (4.45) erhält man:

$$f_2 = (\gamma - 2) \frac{\partial \ln \rho_0}{\partial r} - \frac{2}{r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( (\gamma - 2) \ln \rho_0 - \ln r^{-2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \ln \left( \rho_0^{\gamma-2} r^{-2} \right) \quad (4.49)$$

Außerdem gilt:

$$f_1 = 1 \quad \text{und} \quad f_3 = \frac{4\pi \rho_0 G + B}{c^2(r)} \quad \text{und} \quad x = r \quad (4.50)$$

Daraus folgt:

$$I = \frac{4\pi \rho_0 G + B}{c^2(r)} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial r} \ln \left( \rho_0^{\gamma-2} r^{-2} \right) \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ln \left( \rho_0^{\gamma-2} r^{-2} \right) \quad (4.51)$$

Des weiteren gilt:

$$\xi(x) = \mu \exp \left( \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial r} \ln \left( \rho_0^{\gamma-2} r^{-2} \right) dx \right) = \mu \exp \left( \ln \left( \rho_0^{\frac{\gamma-2}{2}} r^{-1} \right) \right) = \mu \rho_0^{\frac{\gamma-2}{2}} r^{-1} \quad (4.52)$$

Gleichung (4.48) stellt genau dann eine Schwingungsgleichung dar, wenn  $I > 0$ . In diesem Fall ist die Lösung  $\xi(x)$ , die die Störung zum Zeitpunkt  $t = 0$  beschreibt, beschränkt.

Bei einer realistischen Störung der Anfangskonfiguration bleibt die Gesamtmasse erhalten. Es gilt somit

$$\int_0^R \mu(r) dr = 0 \quad (\text{mit dem äußeren Radius der Verteilung } R). \quad (4.53)$$

Dies erfordert in jedem Fall eine beschränkte Lösung für  $\mu$  mit mindestens einer Nullstelle. Es wird nun Anhand des Verhaltens von  $I$  untersucht, ob aus der Beschränktheit von  $\mu$  die Positivität von  $B$  folgt. Ist dies der Fall, bewirkt eine oszillierende örtliche Störung auch eine zeitliche Oszillation. Die Ausgangslösung ist dann stabil. Es wird zunächst das Verhalten für große  $r$  analysiert.

Nimmt man an, die Dichte ist proportional zu einer Potenz des Radius, also  $\rho_0 = n r^m$ , wird aus  $I$ :

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{4} \left( \frac{\partial}{\partial r} \ln \left( n r^{m(\gamma-2)-2} \right) \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} \ln \left( n r^{m(\gamma-2)-2} \right) \\ &= \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{(m(\gamma-2)-2)^2}{r^2} - \frac{m(\gamma-2)-2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (4.54)$$

Aus der Endlichkeit der Masse der Kugel folgt, dass  $\rho_0$  für große  $r$  gegen Null geht. Für große  $r$  muss demnach  $m < 0$  sein ( $n$  muss positiv sein, da die Dichte immer positiv ist). In  $I$  lassen sich alle Terme vernachlässigen, die für  $r \rightarrow \infty$  verschwinden. Es bleibt übrig:

$$I = \frac{B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} \quad (4.55)$$

Dies ist offensichtlich positiv, solange  $B$  positiv ist und umgekehrt. Es folgt dann

$$\mu(r) = \xi r \rho_0^{\frac{2-\gamma}{2}} = \xi r n r^{m \frac{2-\gamma}{2}} = \xi n r^{m \frac{2-\gamma}{2} - 1} \quad (4.56)$$

und  $\mu(r)$  ist beschränkt, solange  $m(2 - \gamma) < 2$  ist. Dies ist, da  $m < 0$ , für alle  $\gamma$  mit  $1 < \gamma < 2$ , immer erfüllt. Für  $\gamma > 2$  ist die Bedingung nur erfüllt, solange  $m < \frac{2}{2-\gamma}$ .

Damit ist gezeigt, dass für große  $r$  ein positives  $I$  ein positives  $B$  bedingt. Da  $B$  konstant ist, muss es für alle  $r$  positiv sein. Bei der stabilen Anfangskonfiguration handelt es sich um glatte Funktionen, daher ist mit einem singulären Verhalten nur noch im Zentrum zu rechnen. Es reicht daher aus, nur noch das Verhalten für  $r \rightarrow 0$  zu analysieren. Hier sind zwei Situationen zu unterscheiden: ein regulärer Kern oder ein singuläres Verhalten.

Bei einem regulären Kern hat die Zentraldichte einen endlichen Wert, es geht also  $\rho \rightarrow \text{const.}$  für  $r \rightarrow 0$ . Verwendet man wie oben ein Potenzgesetz für die Dichte, gilt also formal  $m = 0$ . Daher reduziert sich (4.54) zu:

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{(m(\gamma-2) - 2)^2}{r^2} - \frac{m(\gamma-2) - 2}{r^2} \right) \\ &= \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{(-2)^2}{r^2} - \frac{-2}{r^2} \right) = \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{2}{r^2} \end{aligned} \quad (4.57)$$

Um Null ist hier der Term  $-\frac{2}{r^2}$  dominant, es folgt dann aus 4.48:

$$\xi'' - \frac{2}{r^2} \xi = 0 \quad (4.58)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung erhält man  $\xi_{1/2} \propto r^{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}}$  und somit

$$\mu(r) \propto r^{\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} + 1} \quad (4.59)$$

Der Term  $\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$  ist größer Null und daher geht  $\mu \rightarrow 0$  für  $r \rightarrow 0$ . Die Lösung  $\mu(r)$  ist somit unabhängig von  $B$  beschränkt.

Zeigt die Dichte im Zentrum singuläres Verhalten und verhält sich potenzartig, gilt dort wieder  $m < 0$ . Für  $r \rightarrow 0$  folgt dann (4.54):

$$\begin{aligned} I &= \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{(m(\gamma-2) - 2)^2}{r^2} - \frac{m(\gamma-2) - 2}{r^2} \right) \\ &= \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \frac{(m(\gamma-2) - 2)^2}{r^2} - \frac{m(\gamma-2) - 2}{r^2} \right) \end{aligned} \quad (4.60)$$

Mit  $C = m(\gamma - 2) - 2$  lässt sich dies schreiben als:

$$I = \frac{4\pi n r^m G + B}{\kappa \gamma n r^{m(\gamma-1)}} - \frac{1}{4r^2} (C^2 - 2C) \quad (4.61)$$

Der linke Summand ist bei positiven  $B$  für alle  $r$  positiv, was dazu führt, dass  $I$  positiv ist, wenn  $0 > C^2 - 2C$  gilt. Dies gilt genau dann, wenn  $0 < C < 2$ . Daraus leiten sich

folgende Bedingungen für  $m$  ab:

$$\begin{aligned} C < 2 &\Rightarrow m(\gamma - 2) - 2 < 2 \Rightarrow m(\gamma - 2) < 4 \\ C > 0 &\Rightarrow m(\gamma - 2) - 2 > 0 \Rightarrow m(\gamma - 2) > 2 \end{aligned} \quad (4.62)$$

Abschließend kann also gesagt werden, dass die in dieser Arbeit untersuchten polytropen Gaskugeln mit  $1 < \gamma < 2$  unter recht allgemeinen Annahmen gegen kleine Störungen stabil sind.

## 4.3 Kühlung der baryonischen Komponente

### 4.3.1 Realistische Kühlung

Physikalisches Kernstück dieser Arbeit ist die Kühlung des baryonischen Gases. Als Mechanismus hierfür wird die Wasserstoff - Rekombinationskühlung verwendet. Hierbei rekombinieren Proton ( $H^+$ ) und Elektron ( $e$ ) zu neutralem Wasserstoff unter Aussendung eines Photons (13,6 eV). Es wird angenommen, dass das Gas optisch dünn ist. Das Photon kann daher in jedem Fall das System verlassen. Seine Energie geht demnach verloren. Als Kühlrate wird in der Literatur

$$k = 2,85 \cdot 10^{-27} T^{1/2} \left( 5,914 - 0,5 \ln T + 0,01184 T^{1/3} \right) n_e n_{H^+} \quad (4.63)$$

angegeben (Black 1981 [2]). Hierbei ist  $T$  die Temperatur des Gases und  $n_e$  und  $n_{H^+}$  die Teilchenzahldichten von Elektronen und Protonen .

Freie Elektronen und Protonen werden im Gas durch Stoßionisation erzeugt. Um  $n_e$  und  $n_{H^+}$  zu bestimmen, wird zunächst angenommen, dass sich das Gas im Ionisationsgleichgewicht befindet. Es werden genausoviel Wasserstoffatome ionisiert, wie durch Rekombination erzeugt werden:

$$\Gamma_{EH}(T) n_H n_e = \alpha_H(T) n_{H^+} n_e \quad (4.64)$$

Hierbei ist  $n_H$  die Teilchenzahldichte des neutralen Wasserstoffs,  $\Gamma_{EH}$  die Ionisationsrate des Wasserstoffs und  $\alpha_H$  seine Rekombinationsrate. Es gilt

$$\begin{aligned} \Gamma_{EH} &= 5,85 \cdot 10^{-11} T^{1/2} \exp(-157809,1/T) \\ \alpha_H &= 4,36 \cdot 10^{-10} T^{-0,7573} \end{aligned} \quad (4.65)$$

(Werte aus [2], für  $\alpha_H$  wird nur der Wert für  $T > 5000\text{K}$  verwendet). Nach Außen soll das Gas elektrisch neutral sein, daher gilt  $n_e = n_{H^+}$ . Außerdem wird angenommen, dass gesamte Gas besteht aus Wasserstoff. Für die Teilchenzahldichte gilt somit  $n = n_H + n_{H^+} = n_H + n_e$ . Aus (4.64) folgt dann:

$$n_e = n \frac{\Gamma_{EH}}{\Gamma_{EH} + \alpha_H} \quad (4.66)$$

Durch die Gestalt der Temperaturabhängigkeit von  $n_e$  und  $n_{H^+}$  ist sichergestellt, dass die Kühlfunktion unterhalb einer Schwelltemperatur steil auf Null absinkt und sehr kaltes Gas nicht mehr weiter gekühlt wird (siehe auch Abb. 4.3.1).

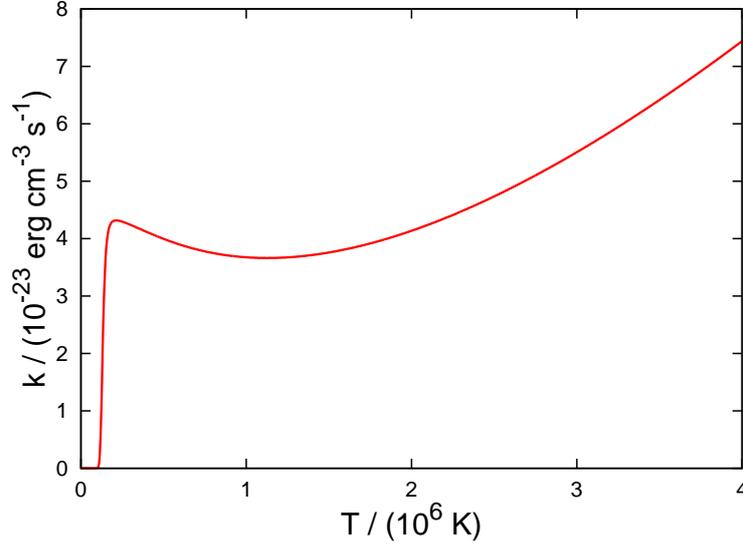


Abbildung 4.2: Kühlfunktion für  $\rho = 3.7 \cdot 10^{-24} \text{ g cm}^{-3}$

Die Teilchenzahldichte ist definiert als  $n = \rho/\mu_H$  mit der Atommasse  $\mu_H = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$  (Entnommen aus [8]). Die für die Berechnung von (4.63) benötigte Temperatur des Gases kann über die thermische Zustandsgleichung des idealen Gases  $p = \rho k_b T/\mu$  aus den primitiven Größen zu  $T = \frac{\mu}{k_b} \frac{p}{\rho}$  bestimmt werden (die Boltzmannkonstante hat den Wert  $k_B = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg K}^{-1}$  [8]).

Auch die Kühlfunktion wird in einheitenlose Größen umgerechnet. In Abschnitt 4.1.2 wurde gezeigt, dass für die einheitenlose Kühlfunktion  $\tilde{k} = k/k_0$  mit

$$k_0 = \frac{r_0}{\rho_0 u_0^3} \quad (4.67)$$

gelten muss, wenn die dynamischen Gleichungen ihre Gestalt nicht verändern sollen. Des weiteren muss bei der Berechnung der Temperatur beachtet werden, dass  $p/\rho = u_0^2 \tilde{p}/\tilde{\rho}$  gilt und somit

$$T = u_0^2 \frac{\mu}{k_b} \frac{\tilde{p}}{\tilde{\rho}} \quad (4.68)$$

folgt. Die Teilchenzahldichte bestimmt sich aus den einheitenlosen Größen zu:

$$n = \frac{\rho_0 \tilde{\rho}}{\mu} \quad (4.69)$$

In der Kühlfunktion verschwinden, anders als in den dynamischen Größen und in der Gleichung für die Gravitationsbeschleunigung bzw. der Poisson-Gleichung, die absoluten Größen  $\rho_0$ ,  $u_0$  und  $r_0$  nicht. Durch die Kühlung ist das vorliegende Problem daher auch nicht mehr frei skalierbar.

### 4.3.2 Einfache Kühlung

Neben der zuvor vorgestellten realistischen Kühlfunktion wird in dieser Arbeit noch eine vereinfachte, auf (4.63) basierende, Kühlfunktion verwendet. Es werden dabei Terme vernachlässigt und das komplette Gas als ionisiert angenommen:

$$k = \text{const.} \cdot \sqrt{\tilde{p}/\tilde{\rho}} \tilde{\rho}^2 \quad (4.70)$$

Die Konstante wird nicht wie oben streng in die einheitenlosen Größen umgerechnet, sondern als freier Parameter variiert. Darüber hinaus wird die Kühlung zu einem definierten Zeitpunkt abgeschaltet, um die Reaktion des Systems beobachten zu können.



# Kapitel 5

## Numerische Berechnungen

Um die Dynamik des vorgestellten Systems aus dunkler Materie und baryonischem Gas numerisch zu analysieren, werden zwei, mit Hilfe der Programmiersprache FORTRAN 77 geschriebene, Programme verwendet. Eines beinhaltet die eigentliche Integration der dynamischen Gleichungen über ein Godunow-Schema 1. Ordnung. Das andere Programm dient der Realisierung der Anfangsgrößen. Im folgenden werden die einzelnen Arbeitsschritte beider Programme besprochen. Es werden jedoch nur die wichtigen Schritte und Größen behandelt, um ein Mindestmaß an Übersichtlichkeit zu ermöglichen. Die Tilden, die die einheitenlosen Größen kennzeichnen, werden in diesem Kapitel weggelassen. Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich die Größen sowohl auf die Baryonen, als auch auf die dunkle Materie.

In beiden Programmen werden zu Beginn die Anzahl der Volumenelemente  $grid$  und der Radius des Integrationsgebietes  $r_{\max}$  festgelegt. Die gemittelten, konservativen Größen von dunkler Materie und Gas werden in jeweils einem Feld  $\mathbf{Q}$  gespeichert:

$$\mathbf{Q}_i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \rho_i u_i \\ \rho_i \varepsilon_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{Q}_i)_1 \\ (\mathbf{Q}_i)_2 \\ (\mathbf{Q}_i)_3 \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

Die gemittelten Größen sind jeweils in der Mitte der Volumenelemente definiert, daher hat  $\mathbf{Q}$  die Ausdehnung  $(3 \times grid)$ . Im Gegensatz dazu sind die Flüsse zwischen den Volumenelementen auf den Grenzen definiert. Aus diesem Grund haben die Felder für die Flüsse zwischen den Volumenelementen  $\mathbf{F}$  mit

$$\mathbf{F}_i = \begin{pmatrix} \rho_i u_i \\ \rho_i u_i^2 + p_i \\ u_i (\rho_i \varepsilon_i + p_i) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

auch mehr Elemente, nämlich  $(3 \times (grid + 1))$ .

Aus  $grid$  und  $r_{\max}$  wird die Ausdehnung der Volumenelemente  $\Delta r = r_{\max}/grid$  und ein Feld  $r_i = \Delta r (i - 1)$ , welches die Position der Ränder der Volumenelemente speichert, berechnet.

## 5.1 Anfangsbedingungen

Zu Beginn werden, wie in jedem FORTRAN 77 Programm die Parameter definiert und Variablen deklariert. In diesem Fall sind dies, neben der Anzahl der Volumenelemente und des Radius des Integrationsgebietes, die Zentraldichten von dunkler Materie und Gas, sowie deren Adiabatenexponenten  $\gamma_d$  und  $\gamma_b$ .

Zur Berechnung der anfänglichen Dichteverteilungen wird nun jedes Volumenelement nochmals in 1000 Elemente unterteilt und, von den Zentraldichten ausgehend, aus dem jeweils vorhergehenden Element mit Hilfe eines Runge-Kutta-Algorithmus 4. Ordnung (siehe auch [13]) die Dichte im folgenden Element berechnet. Die zu Grunde liegenden Differentialgleichungen wurden in Kapitel 4.1.1 hergeleitet, sie lauten:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1}{dr} &= \frac{\chi}{\gamma_d} \frac{y_3}{x^2} y_1^{2-\gamma_d} \\ \frac{dy_2}{dr} &= \frac{1}{\gamma_b} \frac{y_3}{x^2} y_2^{2-\gamma_b} \\ \frac{dy_2}{dr} &= -x^2 (y_1 + y_2)\end{aligned}\tag{5.3}$$

mit

$$x = r \quad ; \quad y_1 = \rho_d \quad ; \quad y_2 = \rho_b \quad \text{und} \quad y_3 = r^2 g\tag{5.4}$$

Nach 1000 Schritten, wenn die Dichteverteilung in einem Volumenelement komplett berechnet ist, wird über

$$\bar{\rho}_i = \frac{1}{\Delta r} \sum_{i=1}^{1000} \rho_i \frac{\Delta r}{1000}\tag{5.5}$$

die Durchschnittsdichte berechnet (folgt aus 3.52). Eigentlich müsste anstatt  $\Delta r$  das Volumenelement  $4\pi r^2 \Delta r$  verwendet werden. Dieses kann jedoch bei genügend kleinem  $\Delta r$  vernachlässigt werden. Die korrekte Berechnung wirft nahe  $r = 0$  numerische Probleme auf, da dann mit grossen Zahlen multipliziert und anschließend dividiert wird. Dies wird durch die Vernachlässigung vermieden.

Sobald die Dichte unter Null fällt, ist der äußere Rand der Verteilung erreicht, und die Dichten für größere Radien werden dann Null gesetzt. Die Impulsdichte ist überall Null, da es sich um eine stationäre Anfangskonfiguration handelt. Es muss nun noch aus der Dichte die Energiedichte berechnet werden. Druck bzw. Druckanalogon hängen wie in Abschnitt 4.1.1 beschrieben mit der Dichte über  $p = \rho_b^{\gamma_b}$  bzw.  $\pi = \rho_d^{\gamma_d}/\chi$  zusammen. Die Energiedichte berechnet sich dann für das Gas zu

$$(\rho_i \varepsilon_i)_b = \left( \frac{1}{2} \rho_i u_i + \frac{p_i}{\gamma_b - 1} \right)_b = \frac{(\rho_i)_b^{\gamma_b}}{\gamma_b - 1}\tag{5.6}$$

bzw. für die dunkle Materie zu

$$(\rho_i \varepsilon_i)_d = \left( \frac{1}{2} \rho_i u_i + \frac{\pi_i}{\gamma_d - 1} \right)_d = \frac{(\rho_i)_d^{\gamma_d}}{\chi (\gamma_d - 1)}\tag{5.7}$$

Abschließend wird die gesamte Konfiguration in eine ASCII-Datei geschrieben.

## 5.2 Hauptprogramm

Auch dieses Programm beginnt mit der Parameterdefinition und der Variablendeklaration. Zusätzlich zur Anzahl der Volumenelemente und dem Radius des Integrationsgebietes werden hier als Parameter die Zeit, bei der die Integration endet, die CFL-Zahl (siehe Abschnitt 3.2.1), die Parameter der Kühlfunktion und eine untere Schwelle für den Druck bzw. das Druckanalogon definiert.

### 5.2.1 Einlesen der Anfangskonfiguration

Zunächst wird die extern generierte Anfangsverteilung eingelesen. Es muss nun bestimmt werden in welchem Volumenelement die Verteilung ins Vakuum übergeht. Hierzu wird, vom Zentrum beginnend, der Druck bzw. das Druckanalogon berechnet. Sobald dieser unter eine bestimmte Schwelle sinkt ( $10^{-12}$  hat sich als zweckmässig erwiesen), wird die Innengrenze dieser Zelle als Grenze des Integrationsgebietes verwendet und in dieser sowie in den weiter außenliegenden Volumenelementen die Größen  $\mathbf{Q}_i$  Null gesetzt. Diese Prozedur wird für dunkle Materie und Gas getrennt durchgeführt.

In nächsten Schritt wird für dunkle Materie und Gas das Verhältnis von Druck bzw. Druckanalogon und Dichte berechnet. Für die dunkle Materie entspricht dies der radialen Geschwindigkeitsdispersion  $\sigma_r^2$ , für das Gas folgt aus  $p = \frac{1}{\mu} \rho k_b T$  (thermische Zustandsgleichung)  $\frac{p}{\rho} = \frac{k_b}{\mu} T$ . Hierbei bezeichnet  $\mu$  die Molekülmasse des Gases. Das Verhältnis  $\frac{p}{\rho}$  entspricht somit bis auf einen konstanten Faktor der Temperatur des Gases.

Die Anfangskonfiguration wird zusammen mit den Druck-Dichte-Verhältnissen in eine erste *Snapshot-Datei* im ASCII-Format geschrieben.

Die nun folgenden Schritte werden für jeden Zeitschritt durchgeführt. Da die Länge des Zeitschritts bei jedem Zeitschritt über die CFL-Bedingung neu berechnet wird, läuft diese große Schleife nicht über eine feste Anzahl an Durchläufen. Sie wird vielmehr so lange durchlaufen, bis die in den Parametern definierte Endzeit erreicht ist.

### 5.2.2 Berechnung und Integration der Flüsse

Zu Beginn eines jeden Zeitschrittes werden die Flüsse  $\mathbf{F}_i$  zwischen den Zellen berechnet. Hierfür werden zunächst für zwei benachbarte Zellen aus den konservativen Größen die primitiven Größen und die Schallgeschwindigkeit berechnet:

$$\begin{aligned} \rho_i &= (\mathbf{Q}_i)_1 \quad ; \quad u_i = \frac{(\mathbf{Q}_i)_2}{(\mathbf{Q}_i)_1} \quad ; \\ p_i &= (\gamma - 1) \left[ (\mathbf{Q}_i)_3 - \frac{1}{2} \frac{(\mathbf{Q}_i)_2^2}{(\mathbf{Q}_i)_1} \right] \quad ; \quad c_i = \sqrt{\frac{\gamma p_i}{\rho_i}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Anschließend wird für diese dann das Riemann-Problem gelöst. Der wichtigste Schritt hierzu ist, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, die Bestimmung von  $p_*$ . Dies geschieht durch

iterative Lösung der Gleichung:

$$0 = f_L(p_\star) + f_R(p_\star) + u_R - u_L \quad (5.9)$$

Es wird sich mehrerer Subroutinen bedient, die in leicht modifizierter Form dem Buch von Eleuterio Toro [17] entnommen sind und im folgenden beschrieben werden.

Die Subroutine *exactsolver* ruft die Subroutine *riemann* auf, welche Druck  $p_\star$  und die mittlere Geschwindigkeit  $u_\star$  im Stern-Gebiet berechnet. Dies geschieht indem zunächst über die Subroutine *starte* der Startwert  $p_0$  für die anschließende Iteration bestimmt wird. Hierfür gibt es 3 Möglichkeiten (vgl. [17, S.128]):

- Eine linearisierte Lösung auf Grund der primitiven Größen links und rechts:

$$p_{PV} = \max \left\{ \frac{1}{2} (p_L + p_R) - \frac{1}{8} (p_L + p_R) (u_R - u_L) (p_L + p_R), 10^{-15} \right\} \quad (5.10)$$

Diese Lösung wird verwendet, sofern  $p_L$  und  $p_R$  sich mindestens um den Faktor 2 unterscheiden und der errechnete Anfangswert  $p_0$  zwischen  $p_L$  und  $p_R$  liegt. Der Mindestwert von  $10^{-15}$  stellt sicher, dass kein zu kleiner oder gar negativer Wert  $p_0$  verwendet wird, da eine Iteration dann unmöglich wäre.

- Die Lösung für zwei Verdünnungswellen (*two rarefaction-waves*):

$$p_{TR} = \left( \frac{a_L + a_R - \frac{1}{2} (\gamma - 1) (u_R - u_L)}{a_L p_L^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}} + a_R p_R^{-\frac{\gamma-1}{2\gamma}}} \right)^{\frac{2\gamma}{\gamma-1}} \quad (5.11)$$

Dies ist die exakte Lösung von  $0 = f_L + f_R + u_R - u_L$  für zwei Verdünnungswellen. Dieser Startwert wird verwendet, wenn  $p_{PV} < \min \{p_L, p_R\}$ .

- Eine Näherung für 2 Stoßwellen (*two shock-waves*):

$$p_{TS} = \max \left\{ \frac{g_L p_L + g_R p_R + u_R - u_L}{g_L + g_R}, 10^{-15} \right\} \quad (5.12)$$

mit

$$g_{L/R} = \sqrt{\frac{\frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{\rho_{L/R}}}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_{L/R} + p_{PV}}} \quad (5.13)$$

Dieser Startwert wird in den Fällen benutzt, in denen weder  $p_{PV}$  noch  $p_{TR}$  verwendet werden.

Anschließend wird die eigentliche Iteration nach dem Newton-Raphson-Schema durchgeführt:

- Die Subroutine *prefun* berechnet die Funktionen  $f_L$  und  $f_R$  und unterscheidet dabei, ob es sich um eine Verdünnungswelle ( $p_\star < p_{L/R}$ ) oder eine Stoßwelle ( $p_\star > p_{L/R}$ ) handelt .

- Der neue Druck  $p_\star$  wird berechnet:

$$p_\star^{(\text{neu})} = p_\star^{(\text{alt})} - \frac{f}{f'} \quad (5.14)$$

mit

$$f(p_\star^{(\text{alt})}) = f_L + f_R + u_R - u_L \quad (5.15)$$

- Die Iteration stoppt, wenn

$$\frac{|p_\star^{(\text{neu})} - p_\star^{(\text{alt})}|}{\frac{1}{2}|p_\star^{(\text{neu})} + p_\star^{(\text{alt})}|} < 10^{-15} \quad (5.16)$$

- Die mittlere Geschwindigkeit im Stern-Gebiet ist dann:

$$u_\star = \frac{1}{2}(u_L + u_R) + \frac{1}{2}(f_L(p_\star) - f_R(p_\star)) \quad (5.17)$$

Mit den errechneten Werten für  $p_\star$  und  $u_\star$  berechnet nun die Subroutine *sample* die Lösung für  $x/t = 0$ . Es werden zunächst die Geschwindigkeiten der einzelnen Wellen berechnet. Die Geschwindigkeit der schnellsten Welle wird später in das Hauptprogramm übergeben und fließt dort in die Berechnung des Zeitschrittes ein. Dieser Mechanismus stellt die größte Modifikation des Programm aus [17] dar. Darauf folgend wird durch Fallunterscheidungen bezüglich  $p_L$ ,  $p_R$  und  $p_\star$  und der Ausbreitungsrichtungen der Wellen bestimmt, in welchem Bereich  $x/t = 0$  liegt und dort die Lösung  $(\rho_s, u_s, p_s)$  berechnet. Nun können die Flüsse  $\mathbf{F}_i$  über

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_1 &= \rho_s u_s \\ \mathbf{F}_2 &= \rho_s u_s^2 + p_s \\ \mathbf{F}_3 &= u_s (1/2 \rho_s u_s^2 + \gamma(\gamma - 1)^{-1} p_s) \end{aligned} \quad (5.18)$$

bestimmt werden.

Der innere und äußere Rand des Integrationsgebietes müssen gesondert behandelt werden. Das Zentrum lässt sich mittels reflektiver Randbedingungen beschreiben. Hierzu wird zunächst in der innersten Zelle, nach dem selben Verfahren wie bei allen anderen Zellen, aus den konservativen Größen  $\mathbf{Q}_1$  die primitiven Größen  $(\rho_1, u_1, p_1)$  bestimmt. Anschließend wird wie in 3.2.2 beschrieben, eine Geisterzelle mit den primitiven Größen  $(\rho_1, -u_1, p_1)$  definiert und über die Lösung des Riemann-Problems zwischen diesen zwei Zellen der Fluss bestimmt.

Die äußerste Zelle des Integrationsgebietes grenzt an das Vakuum. Dort wird daher der Fluss über die Berechnung des Vakuum-Riemann-Problems, so wie in Abschnitt 3.2.3 beschrieben, berechnet. Das Integrationsgebiet muss anschließend um eine Zelle vergrößert werden, da in fast allen Fällen (wenn  $u_0 > 0$ ) ein Fluss in das Vakuum stattfindet. Auch hier wird die maximale Wellengeschwindigkeit bestimmt.

Aus allen Wellengeschwindigkeiten (in *sample* berechnet) wird nun die maximale Geschwindigkeit  $v_{max}$  bestimmt und mit ihrer Hilfe der Zeitschritt gemäss der CFL-Bedingung berechnet:

$$\Delta t = C_{cfl} \frac{\Delta r}{v_{max}} \quad (5.19)$$

Im Anschluss werden durch eine einfache Integration die neuen konservativen Größen berechnet:

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \frac{\Delta t}{\Delta r} [\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i] \quad (5.20)$$

Abschließend wird vom Zentrum beginnend überprüft, ob der Druck bzw. das Druckanalogon in den Zellen unter die Schwelle von  $10^{-12}$  gefallen ist. In diesem Fall wird, ähnlich der anfänglichen Prozedur, die Grenze des Integrationsgebietes auf den Innenrand der betreffenden Zelle gesetzt und in allen äußeren Zellen die konservativen Größen Null gesetzt. Hierdurch wird einerseits sichergestellt, dass Dichte und Druck/Druckanalogon nicht negativ werden oder für den Riemann-Solver zu kleine Werte annehmen und andererseits eine Möglichkeit geschaffen, dass sich durch eine negative Impulsdichte das Integrationsgebiet nach einer Ausdehnung wieder verkleinert. Ohne diese Maßnahme würde sich das Integrationsgebiet stetig um eine Zelle pro Zeitschritt vergrößern.

### 5.2.3 Berechnung und Integration der Quellen

Nach der Behandlung der Flüsse werden nun mit den neuen Größen die Quellen berechnet. Es wird zunächst die Gravitationsbeschleunigung berechnet. Auch dies geschieht durch eine Integration 1. Ordnung, als Anfangswert dient die Bedingung  $g(r=0) = 0$ . Es wird für jede Zelle zunächst die eingeschlossene Masse berechnet:

$$M_i = M_{i-1} + (\rho_D + \rho_B) ((r_{i+1} + r_i) / 2)^2 \Delta r \quad (5.21)$$

Hierbei ist  $(r_{i+1} + r_i) / 2$  der Mittelpunkt des  $i$ -ten Volumenelementes. Die Gravitationsbeschleunigung bestimmt sich nun zu:

$$g_i = - \frac{M_i}{((r_{i+1} + r_i) / 2)^2} \quad (5.22)$$

Das Feld  $g$  ist, wie die Flüsse  $\mathbf{F}$ , auf den Rändern der Zellen definiert. Es hat also  $(grid+1)$  Elemente.

Als nächstes werden, wie schon oben beschrieben, das Druck bzw. Druckanalogon-Dichte-Verhältnis berechnet. Das Druck-Dichte-Verhältnis der baryonischen Komponente geht als Temperatur in die folgende Berechnung der Kühlfunktion ein. Wie in Abschnitt 3.34 beschrieben werden zwei verschiedene Kühlfunktionen verwendet. Die vereinfachte Kühlung bestimmt sich zu:

$$k_i = \text{const.} \cdot \sqrt{(p/\rho)_i} \rho_i^2 \quad (5.23)$$

Die Konstante wird zu Beginn als Parameter festgelegt. Zur Berechnung der realistischen Kühlfunktion müssen zunächst, so wie in Abschnitt 4.1.1 vorgestellt, die absoluten Größen  $u_0$ ,  $\rho_0$  und  $k_0$  aus der angenommenen Masse und Ausdehnung des Halos berechnet werden. Dann gilt in der  $i$ -ten Zelle für die Temperatur und Teilchenzahldichte:

$$\begin{aligned} T &= u_0^2 \frac{\mu}{k_b} \left( \frac{p}{\rho} \right)_i \\ n &= \frac{\rho_0 \rho_i}{\mu} \end{aligned} \quad (5.24)$$

Es werden nun Ionisationsrate, Rekombinationsrate und aus diesen die Elektronendichte bestimmt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{EH} &= 5,85 \cdot 10^{-11} T^{1/2} \exp(-157809, 1/T) \\ \alpha_H &= 4,36 \cdot 10^{-10} T^{-0.7573} \\ n_e &= n \Gamma_{EH} (\Gamma_{EH} + \alpha_H) \end{aligned} \quad (5.25)$$

Mit diesen Größen lässt sich die Kühlfunktion berechnen:

$$k_i = \frac{1}{k_0} 2,85 \cdot 10^{-27} T^{1/2} \left( 5,914 - 0.5 \ln T + 0,01184 T^{1/3} \right) n_e n_{H^+} \quad (5.26)$$

Mit Gravitation und Kühlung können nun die Quellen berechnet werden:

$$\begin{aligned} S_1 &= -\frac{2}{r_i} \rho_i u_i \\ S_2 &= \rho_i \frac{g_i + g_{i+1}}{2} - \frac{2}{r_i} \rho_i u_i^2 \\ S_3 &= \rho_i u_i \frac{g_i + g_{i+1}}{2} - \frac{2}{r_i} u_i (\rho_i \varepsilon_i + p_i) + k_i \end{aligned} \quad (5.27)$$

Da  $g$  auf den Rändern der Zellen definiert ist, die Quellen  $\mathbf{S}_i$  aber in der Zellenmitte, wird hier immer zwischen zwei Werten gemittelt.

Wie schon bei den Flüssen, werden nun über eine Integration erster Ordnung die neuen konservativen Größen berechnet:

$$\mathbf{Q}_i^{n+1} = \mathbf{Q}_i^n + \Delta r \mathbf{S}_i \quad (5.28)$$

Auch hier wird nochmals überprüft, ob der Druck bzw. das Druckanalogon unter  $10^{-12}$  gesunken ist und gegebenenfalls das Integrationsgebiet begrenzt.

Im Anschluss wird noch die Gesamtmasse berechnet:

$$M = \sum_{i=1}^{grid} (\rho_D + \rho_B) \left( (r_{i+1} + r_i) / 2 \right)^2 \Delta r \quad (5.29)$$

Durch den geometrischen Quellterm in der Kontinuitätsgleichung ist das System bezüglich der Masse nicht mehr streng konservativ. Ein Fehler der Massenerhaltung kann nun durch eine Nachnormierung ausgeglichen werden:

$$\mathbf{Q}_i^{\text{norm}} = \mathbf{Q}_i \frac{M_0}{M} \quad (M_0 \text{ ist hierbei die anfängliche Gesamtmasse}) \quad (5.30)$$

Diese recht grobe Maßnahme ist natürlich problematisch, da keine Rücksicht darauf genommen wird, wo die Massenerhaltung verletzt ist. Die Masse bleibt nun zwar erhalten, aber eine artifizielle Beeinflussung der Dynamik des Systems kann nicht völlig ausgeschlossen werden.

### 5.2.4 Schreiben in Datei

Nach einer definierten Anzahl von Zeitschritten werden bestimmte Informationen in eine *Verlaufsdatei* im ASCII-Format geschrieben:

1. die verstrichene Zeit
2. das Verhältnis von Gesamtmasse zu anfänglicher Gesamtmasse der dunklen Materie
3. das Verhältnis von Gesamtmasse zu anfänglicher Gesamtmasse des baryonischen Gases
4. das Verhältnis von Gesamtenergie zu anfänglicher Gesamtenergie der dunklen Materie (hierzu wird analog zur Bestimmung der Gesamtmasse die Energiedichte aufintegriert)
5. das Verhältnis von Gesamtenergie zu anfänglicher Gesamtenergie des baryonischen Gases
6. die Länge des aktuellen Zeitschrittes
7. die Anzahl der bisherigen Zeitschritte
8. die Gesamtdichte im Zentrum  $(\rho_D)_1 + (\rho_B)_1$
9. die Dichte der dunklen Materie im Zentrum  $(\rho_D)_1 + (\rho_B)_1$
10. die Dichte des Gases im Zentrum  $(\rho_D)_1 + (\rho_B)_1$
11. die Grenze des Integrationsgebietes der dunklen Materie
12. die Grenze des Integrationsgebietes des Gases

Darüber hinaus werden, immer wenn 1 % der Endzeit verstrichen ist, die gesamten konservativen Größen zusammen mit der Temperatur in eine ASCII-Datei geschrieben. Diese *Snapshot-Dateien* enthalten zusätzlich noch die aktuell verstrichene Zeit, die Anzahl der bisherigen Zeitschritten und sind durchnummeriert.

Eine solche Snapshot-Datei wird auch noch am Ende des Programms nach Durchlaufen aller Zeitschleifen erstellt.

Mit Hilfe der Verlaufsdatei und den Snapshots können im Anschluss alle Größen bestimmt werden, und so das Verhalten des Systems analysiert werden.

# Kapitel 6

## Ergebnisse

### 6.1 Rechnungen mit der einfachen Kühlfunktion

Zunächst werden Rechnungen unter Verwendung der in Abschnitt 4.3.2 eingeführten vereinfachten Kühlfunktion durchgeführt. Die Anfangsbedingungen werden mit dem in Abschnitt 5.1 vorgestellten Programm erzeugt. Es wird eine Anzahl von 10000 Volumenelementen und ein maximaler Radius von  $r_{max} = 10$  verwendet. Da die einheitenlosen Größen auf den Dimensionen des Gases beruhen, ist dessen einheitenlose Zentraldichte  $(\rho/\rho_0)_{r=0}^b = 1$ . Die Zentraldichte der dunklen Materie wird so gewählt, dass, bei gleicher Ausdehnung von Gas und dunkler Materie ( $\chi$  so wie in 4.17 gewählt), das Verhältnis zwischen beiden Komponenten dem ungefähren kosmologischen Verhältnis von 4:1 entspricht. Da die Dichteverteilung des Gases von der Wahl seines Adiabatenexponenten  $\gamma_b$  abhängt, erhält man für verschiedene  $\gamma_b$  verschiedene Zentraldichten für die dunkle Materie:

$$\begin{aligned} \text{für } \gamma_b = 5/3 = 1.66 & : (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 4 \\ \text{für } \gamma_b = 7/5 = 1.40 & : (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 2.05 \\ \text{für } \gamma_b = 8/6 = 1.33 & : (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 1.54 \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die mit diesen Adiabatenexponenten berechneten Anfangsdichten sind in Abbildung 6.1 dargestellt.

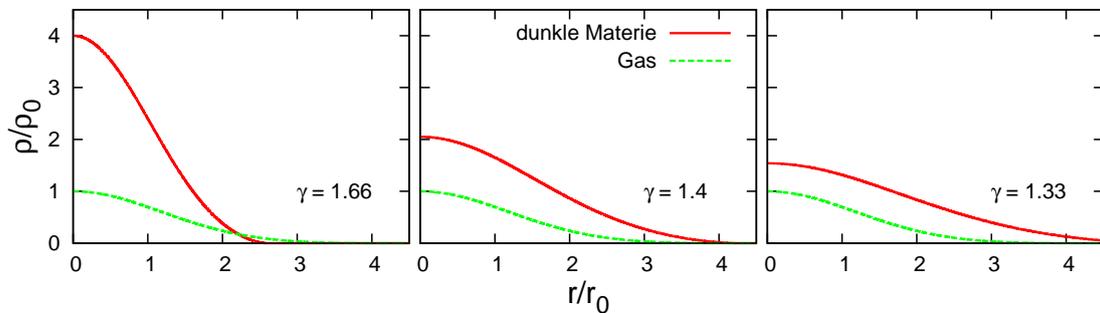


Abbildung 6.1: Anfangskonfigurationen für verschiedene  $\gamma_b$

Von diesen Anfangskonfigurationen ausgehend wird nun, mit dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Programm die Dynamik des Systems infolge der Kühlung berechnet. Mit Hilfe von Rechnungen, in denen die Kühlung komplett deaktiviert ist, kann festgestellt werden, ob die Anfangsbedingungen wirklich stabil sind.

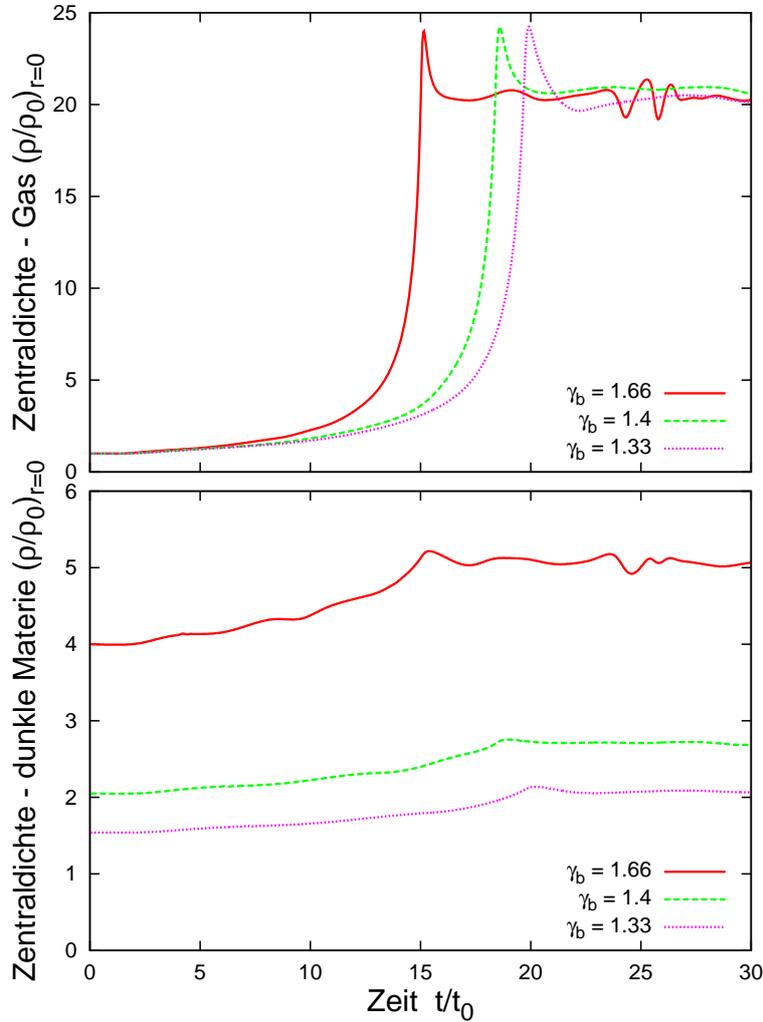


Abbildung 6.2: Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie bis  $t/t_0 = 30$

Als Konstante in der vereinfachten Kühlfunktion  $k = c \cdot \sqrt{p/\rho} \rho^2$  wird  $c = 0.5$  verwendet. Die CFL-Nummer, mit der die Länge des Zeitschrittes berechnet wird, ist  $C_{cfl} = 0.5$ . Um die Reaktion des Systems auf die Kühlung zu analysieren wird die Kühlung, sobald die Zentraldichte des Gases den Wert  $(\rho/\rho_0)_{r=0}^b = 20$  überschreitet, deaktiviert. In Abbildung 6.2 ist der zeitliche Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie gezeigt. Es ist ersichtlich, dass der Anstieg der Zentraldichte mit steigendem  $\gamma_b$  schneller stattfindet. Die polytropen Anfangsbedingungen mit größerem  $\gamma_b$  haben, bei gleichem Druck, eine geringere Energiedichte, daher bewirkt die Kühlung bei ihnen eine stärkere Druckänderung. Diese resultiert in einer schnelleren Verdichtung des Gases. Nach dem Abschalten der Kühlung verdichtet sich das Gas noch weiter, um jedoch schließlich auf ein Dichteprofil mit der Gas-Zentraldichte  $(\rho/\rho_0)_{r=0}^b = 20$  zurückzufallen. Diese Schwingung wird mit sinkendem  $\gamma_b$  ausgeprägter. Auch dies ist mit der schwächeren Abhängigkeit der Energiedichte vom Druck bei kleinerem  $\gamma_b$  zu erklären. Das Gas reagiert dann träger auf

Druckunterschiede. Weiterhin stellt man fest, dass die dunkle Materie der Konzentration des Gases folgt. Die Kopplung über das Gravitationspotential ist offenbar so stark, dass selbst die vergleichsweise schwachen Schwankungen nach Abschalten der Kühlfunktion sich auf das Gas auswirken. Die Stärke der Kontraktion der dunklen Materie ist umso größer, je höher  $\gamma_b$  und damit auch die anfängliche Zentraldichte der dunklen Materie ist.

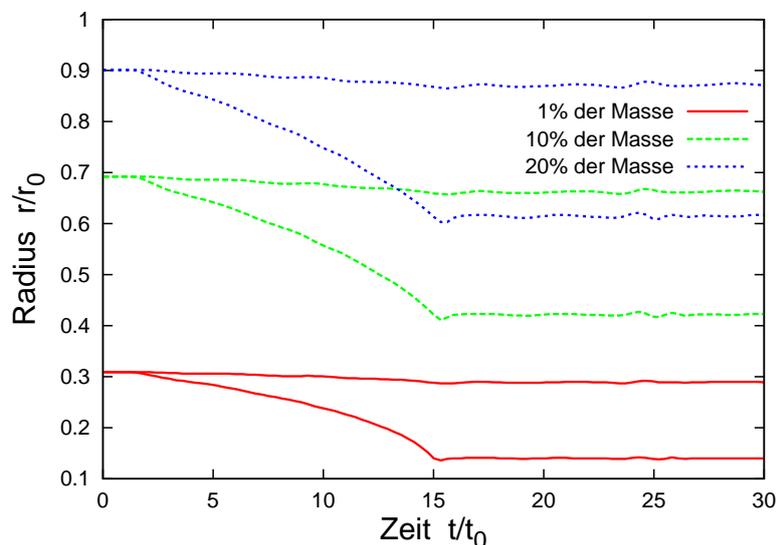


Abbildung 6.3: Verlauf der Radien, die 1%, 10% bzw. 20% der Masse einschließen (bis  $t/t_0 = 30$ )

Zur Veranschaulichung der Kontraktion von Gas und dunkler Materie, sind in Abbildung 6.3 die Radien dargestellt, die 1%, 5% bzw. 20 % der Masse des Gases bzw. der dunklen Materie einschließen (für die Rechnung mit  $\gamma_b = 1.66$ ). Die Kurven für das Gas sind hierbei diejenigen, die bis  $t/t_0 \approx 15$  steil abfallen, während die dunkle Materie nur schwach kontrahiert. In diesem speziellen Fall  $\gamma_b = \gamma_d$  ist der Anteil der eingeschlossenen Masse zu Beginn bei jedem Radius für beide Komponenten gleich.

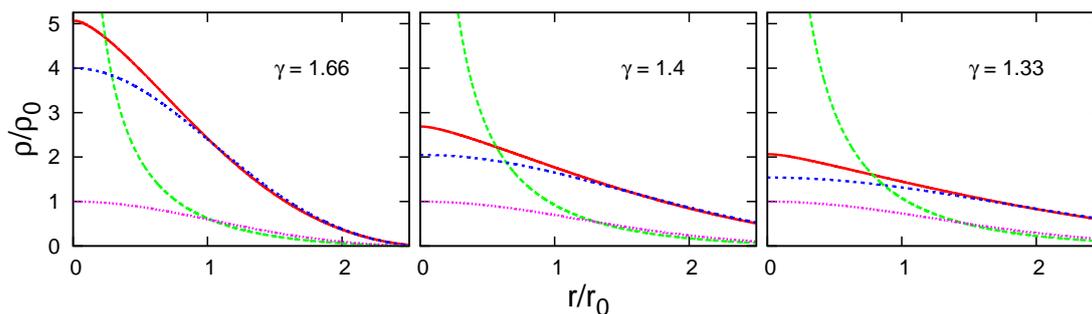


Abbildung 6.4: Ausschnitt aus dem Dichteprofil:  $t/t_0 = 0$  und  $t/t_0 = 30$

Die Dichteprofile bei  $t/t_0 = 30$  sind, zusammen mit den Anfangsdichteprofilen, in Abbildung 6.4 ausschnittsweise dargestellt. Man erkennt, dass die Dichte der dunklen Materie sich in den Außenbereichen kaum ändert, während im Zentrum die Verteilung zunehmend steiler wird.

Betrachtet man die weitere Entwicklung des Systems, stellt man fest, dass, obwohl das Gas nicht weiter kühlt, das System nicht stabil bleibt. Vielmehr findet, abhängig vom Adiabatenexponenten des Gases, eine weitere Kontraktion des Gases (für  $\gamma_b = 1.4$  oder  $1.33$ ) bzw. eine Expansion (für  $\gamma_b = 1.66$ ) statt. Dieses Verhalten ist in Abbildung 6.5 dargestellt.

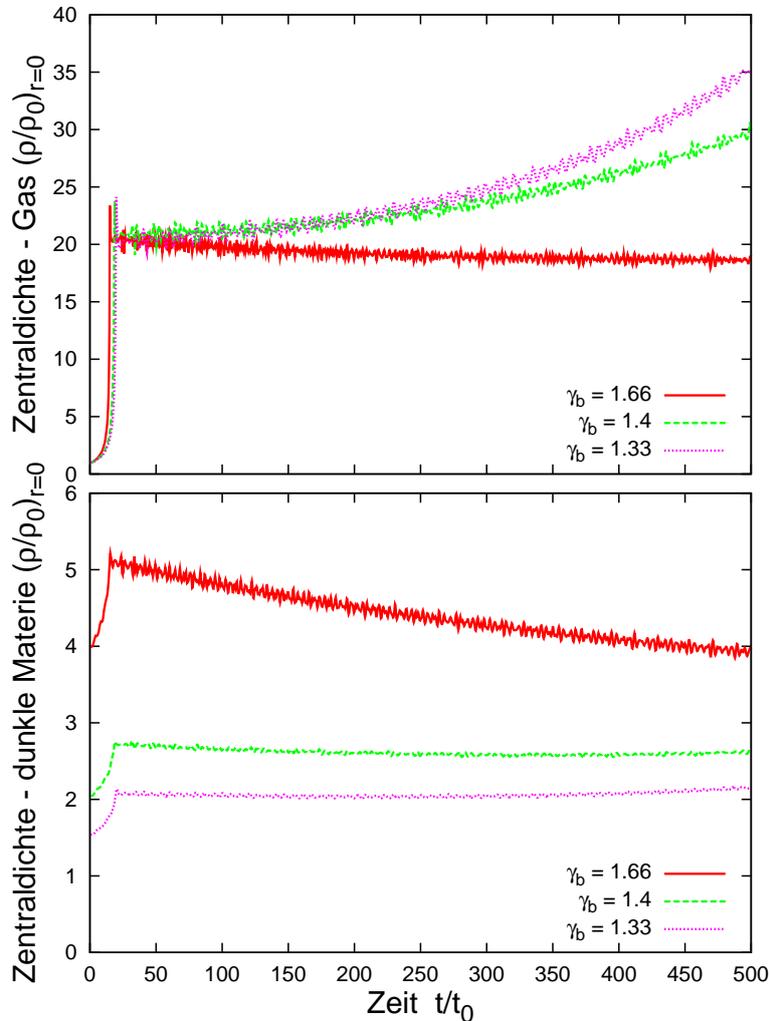


Abbildung 6.5: Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie  $t/t_0 = 500$

Bei den beschriebenen Rechnungen wurde die Dichte nach jedem Zeitschritt nachnormiert, um die Gesamtmasse konstant zu halten (vgl. Abschnitt 5.2). Ohne diese Vorrichtung führt die unzureichende Massenerhaltung zu einem so starken Anwachsen der Gesamtmasse, dass die Dynamik von diesem Massenzuwachs dominiert wird. In Abbildung 6.6 sind zeitlicher Verlauf der Zentraldichte und das Verhältnis von anfänglicher Gesamtmasse zu momentaner Gesamtmasse in einer Rechnung ohne Nachnormierung dargestellt. Zum Vergleich ist auch die entsprechende Rechnung mit Nachnormierung angegeben. Die geometrischen Quellterme, die für den Massenfehler verantwortlich sind, sind proportional zur Impulsdichte. Diese wächst, während der Kontraktion, mit dem Radius an, um dann für große Radien abzufallen. Der Massenfehler ist somit nahe dem Zentrum am größten. Hierdurch wird das Anwachsen der Zentraldichte nach Abschalten der Kühlung verstärkt.

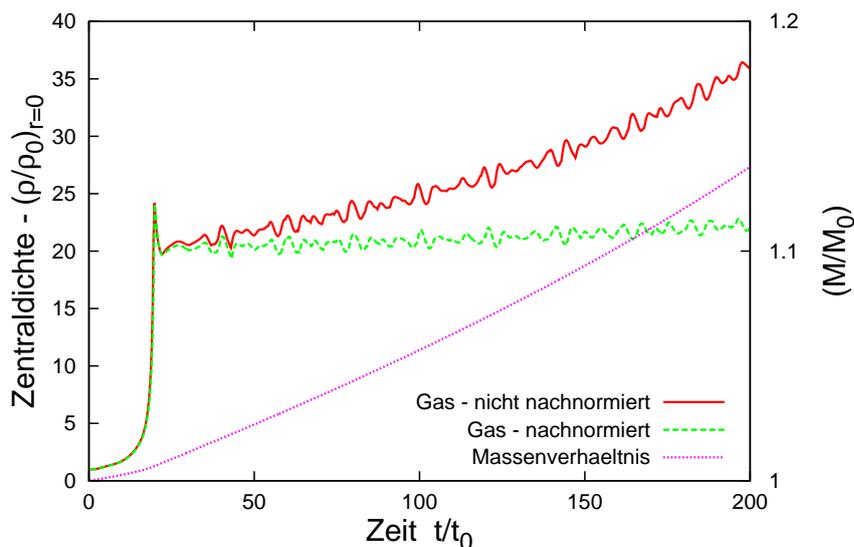


Abbildung 6.6: Verlauf der Zentralsdichte und des Massenverhältnisses ( $\gamma_b = 1.33$ )

In Abbildung 6.7 sind die Verläufe der Zentralsdichte für verschiedene Kühlfunktionen dargestellt. Hierfür wurde die Konstante der Kühlfunktion variiert. Man stellt fest, dass die Geschwindigkeit der Kühlung keinen Einfluss auf das Verhalten des Systems nach dem Abschalten der Kühlung hat. Die geringfügigen Unterschiede zwischen den Kurvenverläufen lassen sich mit den unterschiedlichen Zeitpunkten erklären, bei denen die Kühlung deaktiviert wird.

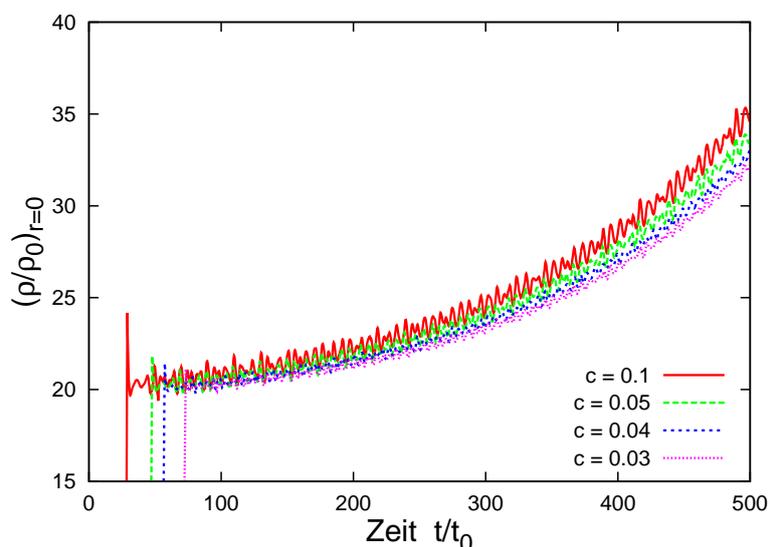


Abbildung 6.7: Verlauf der Zentralsdichte des Gases und der dunklen Materie bis  $t/t_0 = 500$  für verschieden starke Kühlung

Aus Abbildung 6.5 ist noch nicht ersichtlich, ob das Verhalten des Systems nach dem Abschalten der Kühlfunktion von dem Adiabatenexponenten des Gases oder der Zentraldichte der dunklen Materie abhängig ist. Es werden daher weitere Rechnungen durchgeführt, in denen die Zentraldichte der dunklen Materie variiert wird, der Adiabatenexponent des Gases aber  $\gamma_b = 1.33$  fest bleibt. Durch die unterschiedlichen Zentraldichten der dunklen Materie ist das Massenverhältnis zwischen dunkler Materie und Gas nicht mehr 4:1. Man erhält vielmehr:

$$\begin{aligned}
 &\text{für } (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 1 & : & M_d/M_b = 2.67 \\
 &\text{für } (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 2 & : & M_d/M_b = 5.12 \\
 &\text{für } (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 3 & : & M_d/M_b = 7.54 \\
 &\text{für } (\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 4 & : & M_d/M_b = 9.96
 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Der zeitliche Verlauf der Zentraldichten für diese Rechnungen ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Man erkennt einen leichten Unterschied im Anstieg der Kurven. Dieser ist jedoch viel schwächer als in Abbildung 6.5. Die Anfangsdichte der dunklen Materie hat also nur einen vergleichsweise schwachen Einfluss auf das Verhalten des Systems.

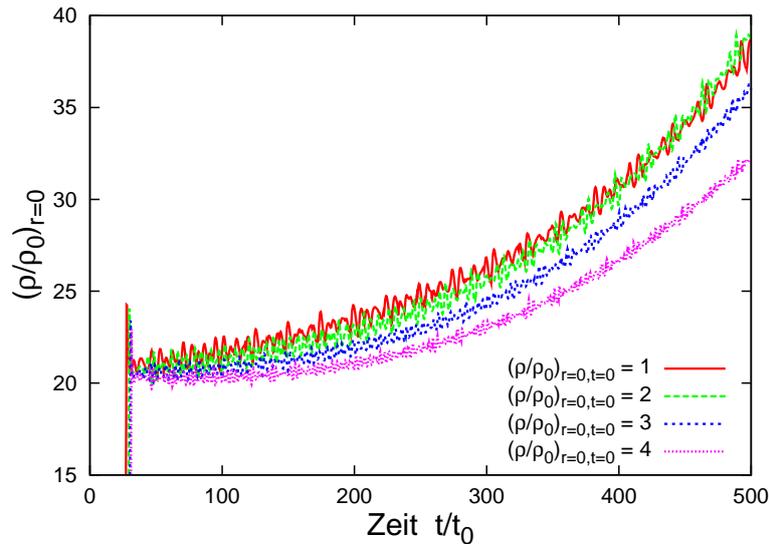


Abbildung 6.8: Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie bis  $t/t_0 = 500$  für verschiedene anfängliche Zentraldichten der dunklen Materie

In Abbildung 6.9 ist schliesslich Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie für verschiedene  $\gamma_b$  bei einer festen anfänglichen Zentraldichte von  $(\rho/\rho_0)_{r=0}^d = 1.54$  dargestellt. Es ist ein deutlicher Unterschied im Anstieg der Kurven festzustellen. Das Verhalten des Systems nach dem Abschalten der Kühlfunktion wird somit vom Betrag des Adiabatenexponenten der baryonischen Komponente dominiert. Je niedriger  $\gamma_b$  ist, um so stärker ist die Kontraktion nach dem Abschalten der Kühlung.

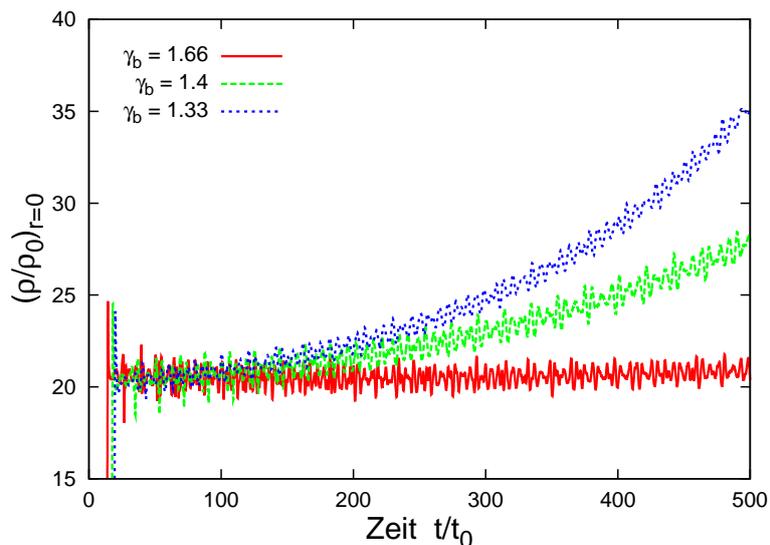


Abbildung 6.9: Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie bis  $t/t_0 = 500$  für verschiedene  $\gamma_b$

Weiter wird untersucht, inwieweit sich die Änderung der CFL-Nummer (vgl. Abschnitt 3.2.1) auf die Entwicklung des Systems auswirkt. In Abbildung 6.10 ist der Verlauf der Zentraldichte des Gases bei Rechnungen mit verschiedenen CFL-Nummern gezeigt (die restlichen Parameter entsprechen denen der Rechnung von Abbildung 6.5).

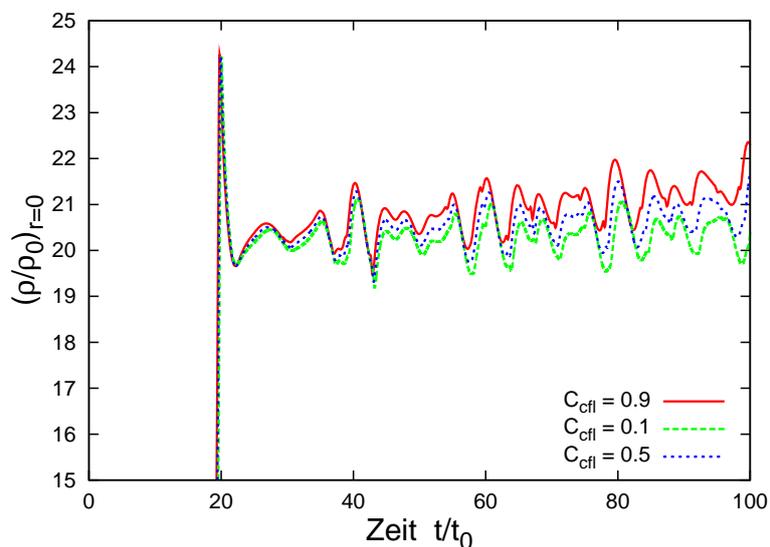


Abbildung 6.10: Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie bis  $t/t_0 = 100$  für verschiedene CFL-Nummern

Man erkennt einen geringfügigen Unterschied im Verlauf. Überraschenderweise ist der Anstieg der Zentraldichte nach dem Abschalten der Kühlfunktion mit steigender CFL-Zahl stärker. Ein, trotz Nachnormierung, immer noch vorhandener Massenfehler würde sich in

einem stärkeren Anstieg bei kleineren CFL-Zahlen auswirken. Der Fehler tritt nämlich in jedem Zeitschritt auf und würde daher wegen der höheren Anzahl an Zeitschritten bei kleineren CFL-Zahlen größer sein. Der in allen anderen Rechnungen benutzte Wert  $C_{cfl} = 0.5$  wird verwendet, da er bei relativ geringem Massenfehler, einen Anstieg in der Zentraldichte liefert, der zwischen denen liegt, die mit anderen CFL-Nummern berechnet wurden.

In Abbildung 6.11 ist der weitere Verlauf der Zentraldichten von Gas und dunkler Materie der in Abbildung 6.5 vorgestellten Rechnung dargestellt (für  $\gamma_b = 1.33$  und  $\gamma_b = 1.66$ ). In der Rechnung mit  $\gamma_b = 1.33$  steigt die Zentraldichte von Gas und dunkler Materie zunächst an, hat dann bei  $t/t_0 \approx 900$  ein Maximum und fällt dann wieder ab. Die Zentraldichte der dunklen Materie fällt sogar unter ihren Ausgangswert. In der Rechnung mit dem höheren  $\gamma_b = 1.66$  fällt die Zentraldichte monoton ab.

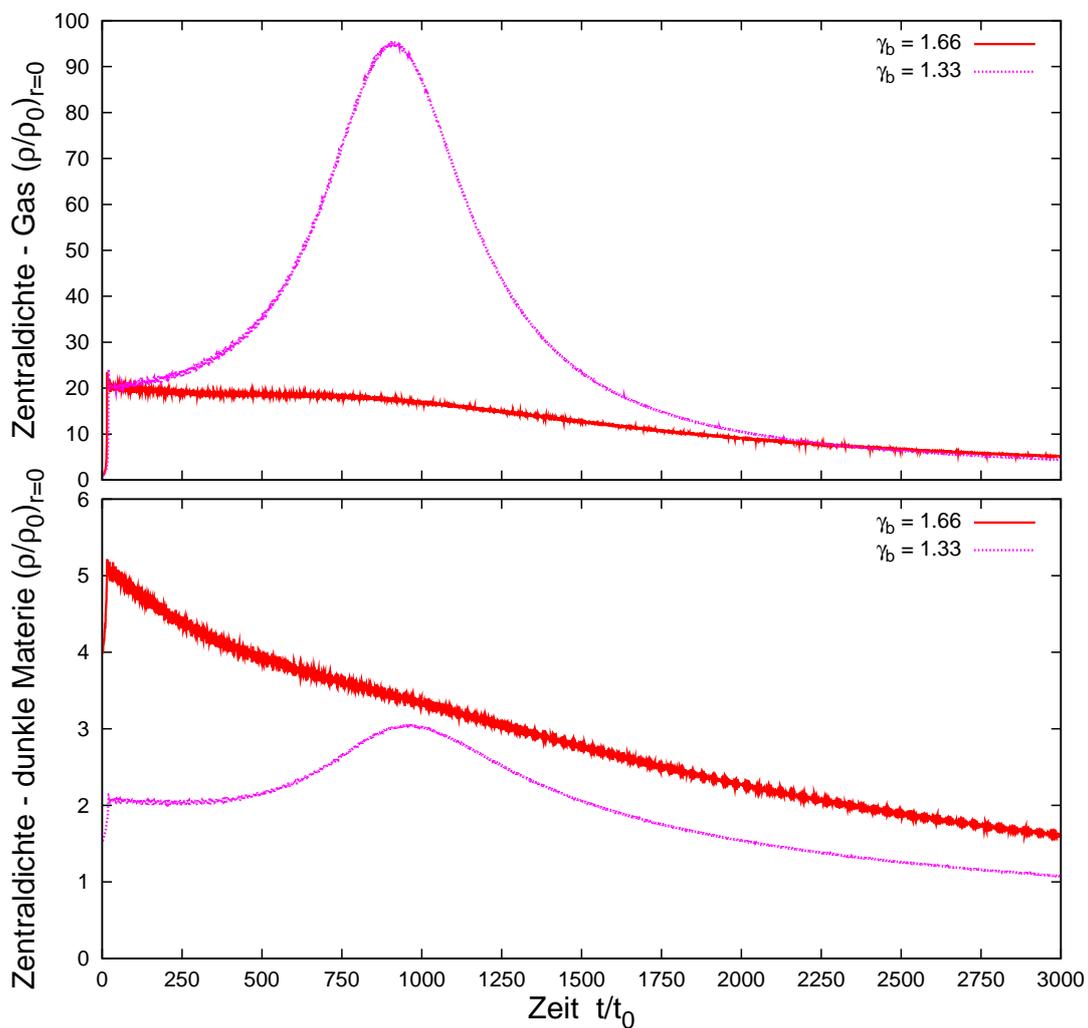


Abbildung 6.11: Verlauf der Zentraldichte des Gases und der dunklen Materie bis  $t/t_0 = 3000$

Die Endkonfigurationen dieser Rechnungen sind in Abbildung 6.12 dargestellt. Man erkennt, dass das Gas weit weniger konzentriert ist, als direkt nach der Kühlphase. Die dunkle Materie ist sogar noch weiträumiger verteilt als zu Beginn.

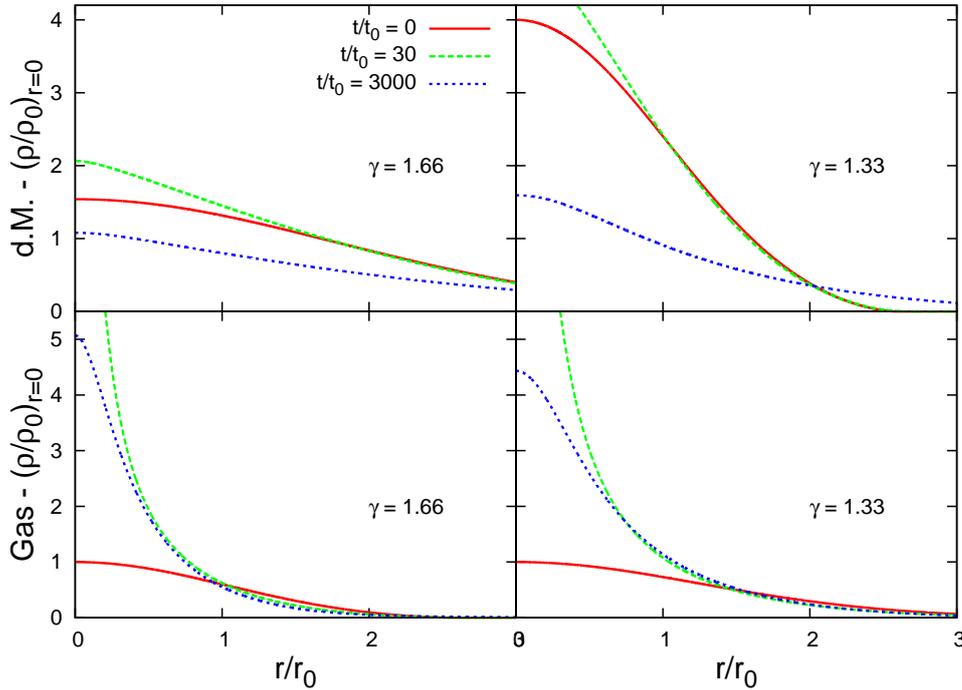


Abbildung 6.12: Dichteprofile für  $\gamma_b = 1.33$  und  $\gamma_b = 1.66$  :  $t/t_0 = 0$  und  $t/t_0 = 30$

Paradoxaerweise bewirkt demnach die Kühlung (ein Entzug von Energie) letztendlich eine Expansion der dunklen Materie. Es ist jedoch zu beachten, dass in dem System die Gesamtenergie  $E_G = \int \rho \varepsilon dV + \int \rho \phi dV$  nicht erhalten bleibt. Für Energieerhaltung ist ein Potential notwendig, welches nur vom Ort abhängt. Das Potential, welches auf ein Volumenelement an einer gegebenen Position wirkt, ist jedoch nicht mehr allein von dessen Ort, sondern auch von der Dichte der jeweils anderen Komponente abhängig. Dies führt durch die sonstige (nichtgravitative) Entkopplung zu einer effektiven Zeitabhängigkeit des Potentials. Eine stationäre Verteilung der einen Komponente kann durch die Änderung der anderen Komponente ein sich änderndes Potential erfahren. Ähnliches ist vom Prozess der *Violent Relaxation* bekannt (siehe auch: Lynden-Bell 1967 [9], Kull et al. 1997 [6]).

Durch Umformen der Gleichung für die Energiedichte lässt sich eine Gleichung für die Zeitentwicklung der Gesamtenergie finden:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \varepsilon + p)) - \rho u g \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon + \rho \phi) - \rho \dot{\phi} - \dot{\rho} \phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \varepsilon + p)) + \rho u \frac{\partial}{\partial r} \phi \\
 &= \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon + \rho \phi) - \rho \dot{\phi} - \dot{\rho} \phi + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \varepsilon + p)) \\
 &\quad + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \phi)) - \underbrace{\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho u)}_{=-\dot{\rho}} \phi
 \end{aligned}$$

Der letzte Term wird mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung umgeformt. Man erhält:

$$0 = \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon + \rho \phi) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u (\rho \varepsilon + p + \rho \phi)) - \rho \dot{\phi} \quad (6.3)$$

Integriert man nun über das gesamte Volumen, lässt sich das Integral über den zweiten Term in ein Oberflächenintegral umwandeln und verschwindet für ein räumlich begrenztes System ( $u$  ist am Rand Null). Für die zeitliche Änderung der Gesamtenergie erhält man so:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_G = \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\rho \varepsilon + \rho \phi) dV = \int_V \rho \dot{\phi} dV \quad (6.4)$$

Für ein explizit zeitabhängiges Potential verschwindet die rechte Seite nicht mehr. Eine weitere zeitliche Integration liefert:

$$E_G(t) - E_G(0) = \underbrace{\int_0^t \int_V \rho \dot{\phi} dV d\tilde{t}}_{=: \Phi(t)} \quad (6.5)$$

In Abbildung 6.13 ist der Verlauf der Differenz der Gesamtenergie zur anfänglichen Gesamtenergie und die integrierte Änderung des Gravitationspotentials  $\Phi$  dargestellt. Das Potential ist dabei so gewählt, dass es im Unendlichen verschwindet.

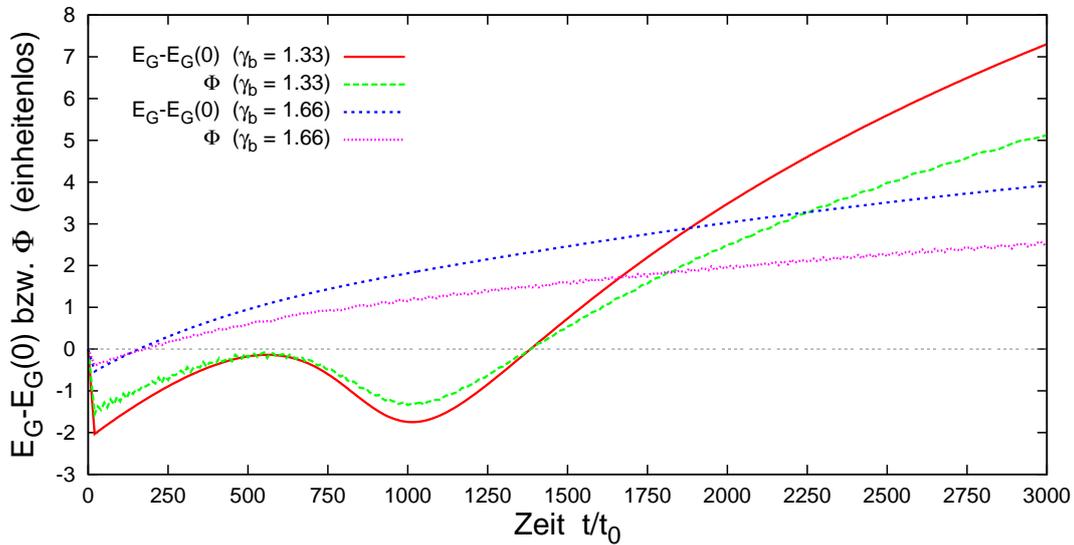


Abbildung 6.13: Zeitlicher Verlauf der Gesamtenergie und der integrierten Änderung des Gravitationspotentials bis  $t/t_0 = 3000$

Für beide Rechnungen sinkt die Gesamtenergie zunächst in Folge der Kühlung, steigt dann aber wieder an. Für die Rechnung mit  $\gamma_b = 1.33$  fällt sie dann wieder ab, um schließlich wieder anzusteigen. Aus diesem Grund steigt die Zentralsdichte zunächst bis zu dem beobachteten Maximum an. Für große  $t/t_0$  wächst die Gesamtenergie weiter und steigt über den Wert vor der Kühlung. Die Energie für die beobachtete Expansion stammt

demnach aus einer effektiven zeitlichen fortschreitenden Abschwächung des Potentials. Die Differenz zwischen den Kurven für  $\Phi$  und  $E_G - E_G(0)$  erklärt sich aus einer numerischen Fehlerakkumulation (die Snapshots, aus denen das Potential und seine zeitliche Ableitung berechnet wurden, lagen zeitlich zu weit auseinander).

Bemerkenswert ist auch die zeitliche Entwicklung des Verhältnisses aus Druck und Dichte des Gases (dargestellt in Abbildung 6.14). Dieses Verhältnis ist proportional zu seiner Temperatur. Aufgrund der Kühlung sinkt diese zunächst. Es ist ersichtlich, dass aufgrund der höheren Dichte im Zentrum, dort das Gas am schnellsten kühlt. Durch die an die Kühlung anschließende oben beschriebene Dynamik wird dieses Temperaturgefälle zum Zentrum wieder ausgeglichen.

Das Verhältnis von Druckanalogon zu Dichte der dunklen Materie, also ihre radiale Geschwindigkeitsdispersion (nicht dargestellt), folgt weitestgehend ihrer Dichte.

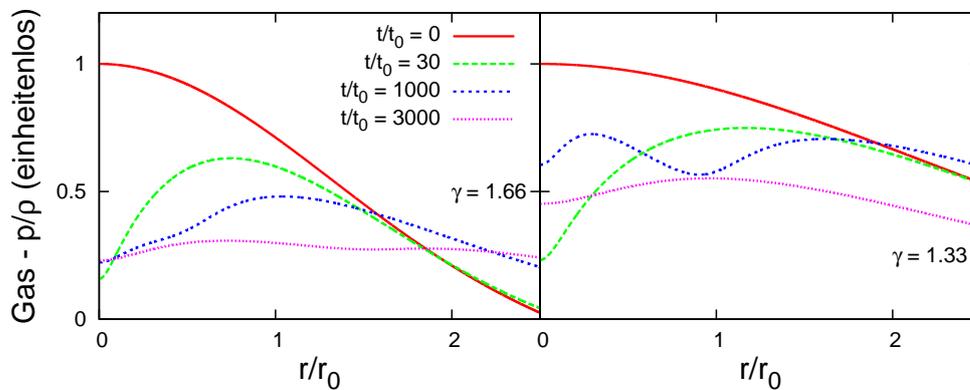


Abbildung 6.14: Verhältnis von Druck zu Dichte des Gases zu verschiedenen Zeitpunkten

## 6.2 Rechnungen mit der realistischen Kühlfunktion

Die im vorhergehenden Abschnitt benutzte Deaktivierung der Kühlfunktion, die erfolgt, sobald eine bestimmte Zentraldichte überschritten wird, ist selbstverständlich unphysikalisch. Sie wird in dieser Arbeit lediglich verwendet, um einzelne Aspekte der Dynamik des Systems zu untersuchen, die bei einer wirklichkeitsgetreueren Behandlung so nicht erkennbar wären. In diesem Abschnitt wird die in 3.34 vorgestellte realistische Kühlfunktion verwendet und mit ihrer Hilfe die Dynamik von Halos untersucht, die in Ausdehnung und Masse astronomischen Objekten entsprechen. Die realistische Kühlfunktion besitzt eine Schwelltemperatur, unterhalb der nicht weiter gekühlt wird. Nun kann, auch wenn im Zentrum die Temperatur schon unter diese Schwelle gesunken ist, in den äußeren Bereichen noch gekühlt werden. Die zuvor verwendete, vereinfachte Kühlfunktion wird im Gegensatz dazu für alle Zellen gleichzeitig abgeschaltet.

Zunächst wird ein Halo untersucht, der in Größe und Masse einer Galaxie entspricht. Es ist aber hervorzuheben, dass hier keine genaue Modellierung der Galaxiendynamik erfolgt, da weder das polytrope Dichteprofil noch die sphärische Symmetrie bei realen Galaxien beobachtet werden.

Für die Berechnung der realistischen Kühlfunktion wird diese, im Gegensatz zur vereinfachten Kühlung, exakt in das System von einheitenlosen Größen umgerechnet. Da hierfür aber die absoluten Grundgrößen benötigt werden, muss im Vorfeld abgeschätzt werden, welche Dimensionen der untersuchte Halo hat. Wie schon in Abschnitt 4.1.2 beschrieben, hat eine typischen Galaxie den Radius  $R = 0.1$  Mpc und eine Gesamtmasse vom  $M = 10^{11} M_{\odot}$ . Die Anfangskonfiguration wird wie schon zuvor berechnet (Es werden wieder  $\gamma_b = 1.66$ ,  $\gamma_b = 1.4$  und  $\gamma_b = 1.33$  mit dem Verhältnis von 4:1 zwischen dunkler Materie und Gas verwendet. Der maximale Radius beträgt jedoch  $r_{Max} = 20$  und es werden 20000 Volumenelemente verwendet.). Für die Grundgrößen erhält man so (für  $\gamma_b = 1.33$ ):

$$\begin{aligned} r_0 &= 5,9 \cdot 10^{21} \text{ cm} \\ \rho_0 &= 3,6 \cdot 10^{-22} \text{ g cm}^{-3} \\ t_0 &= 5,8 \cdot 10^{13} \text{ s} \sim 2 \text{ Mio. Jahre} \\ u_0 &= 10^8 \text{ cm s}^{-1} \end{aligned} \tag{6.6}$$

Die absoluten Größen gehen nur in die Kühlfunktion ein, daher ist die Anfangskonfiguration mit der aus Abbildung 6.1 identisch. Die Dynamik des Systems wird auf dieselbe Weise wie bei den Rechnungen mit der vereinfachten Kühlfunktion berechnet. Die Kühlung wird jedoch nicht instantan abgeschaltet, sondern nun durch die Gestalt der Kühlfunktion kontrolliert. In Abbildung 6.15 ist der zeitliche Verlauf der Radien dargestellt, die 1%, 10% und 20% der Masse von Gas bzw. dunkler Materie einschließen. Wie schon in Abbildung 6.3 sind die Kurven für das Gas diejenigen, die stark abfallen, während die Kurven für die dunkle Materie eher schwach sinken.

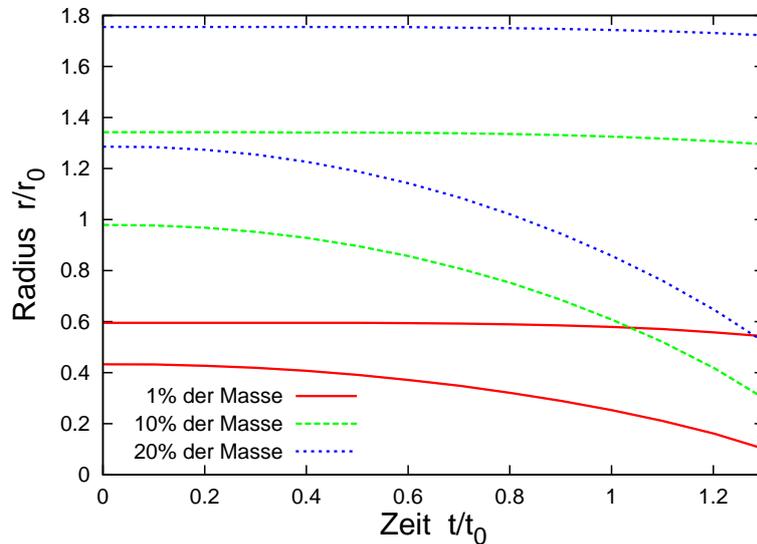


Abbildung 6.15: Verlauf der Radien, die 1%, 10% bzw. 20% der Masse einschließen ( $\gamma_b = 1.33$ )

Betrachtet man nun den Verlauf der Zentraldichte des Gases für verschiedene  $\gamma_b$  (Abbildung 6.16), so beobachtet man, dass die Zentraldichte exponentiell ansteigt. Hierbei hat der Adiabatenexponent des Gases keinen Einfluss auf diesen Kollaps. Dies liegt daran, dass die Temperatur des Gases zu Beginn sehr groß ist und daher so stark gekühlt wird, dass die Temperatur im Zentrum sehr schnell um mehrere Größenordnungen absinkt. Durch

den damit einhergehenden Druckabfall, kollabiert das Gas so, als ob überhaupt kein Druck vorhanden wäre. Somit ist es auch gleichgültig wie groß  $\gamma_b$  ist, also wie stark der Druck auf eine Änderung der Energiedichte reagiert.

Ab  $t/t_0 \approx 13$  wird die Gasdichte im Zentrum und damit auch der Druckgradient so groß, dass das verwendete Programm dort nicht mehr das Riemann-Problem lösen kann. Die Rechnung wird dann abgebrochen. Es ist aber wahrscheinlich, dass sich der exponentielle Kollaps fortsetzen wird.

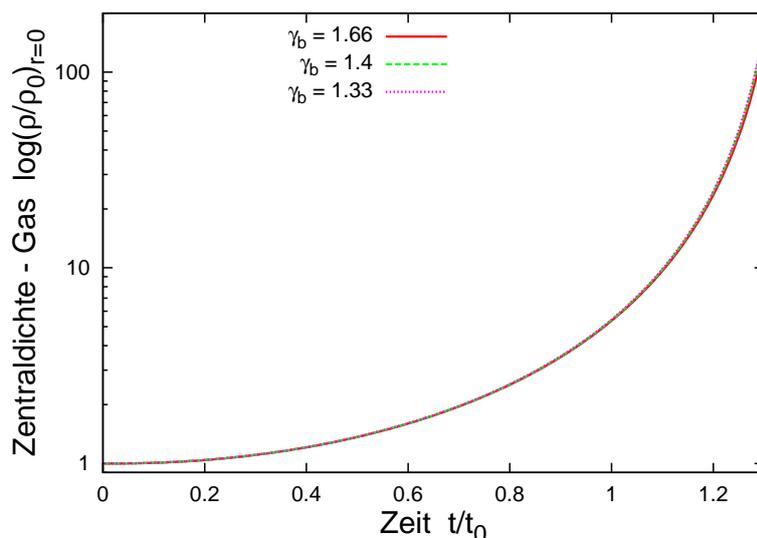


Abbildung 6.16: Verlauf der Zentraldichte für verschiedene  $\gamma_b$

In Abbildung 6.17 wird dieser Kollaps des Halos aus dunkler Materie und Gas mit dem eines Halos verglichen, der nur aus Gas besteht. Hierbei werden zwei Fälle unterschieden:

1. Das Gas hat denselben Zentraldruck wie das Gas im zweikomponentigen System:  
In diesem Fall ist die Gaskugel deutlich ausgedehnter als das zweikomponentige System, da durch das Fehlen der dunklen Materie das Potential geringer ist. Bei gleichem Zentraldruck nehmen Druck und Dichte in der polytropen Verteilung mit dem Radius dann schwächer ab. Das Gas hat hier ca. 75% der Gesamtmasse des zweikomponentigen Systems.
2. Das Gas hat dieselbe Masse wie das Gas im zweikomponentigen System:  
Hier ist der Gasdruck und damit auch seine Temperatur geringer, da bei geringerem Potential das Gas ähnlich stark konzentriert ist.

Die für diese Fälle errechneten Anfangsdichteverteilungen sind in Abbildung 6.18 dargestellt. Sie sind mit einem Programm errechnet, das weitestgehend dem in Abschnitt 5.1 beschriebenen Programm entspricht. Es wird jedoch nur mit einer Komponente gerechnet. Ebenso wird die Dynamik der Gaskugel mit einer Einkomponenten-Version des Programms berechnet, das für das zweikomponentige System benutzt wird.

Es ist auffallend, dass der Kollaps des zweikomponentigen Systems ca. 1/3 weniger Zeit beansprucht, als der des Gases allein. Auch besteht zwischen Fall 1 und Fall 2 kaum ein Unterschied in der Dynamik. Hier wird wieder offenbar, dass der Kollaps des Systems

durch das Potential dominiert wird, der Druck jedoch kaum einen Einfluss hat. Im zweikomponentigen System sorgt allein die zusätzliche Masse der dunklen Materie für einen schnelleren Kollaps. Die unterschiedliche Druckverteilung in Fall 1 und 2 hat keinen Einfluss.

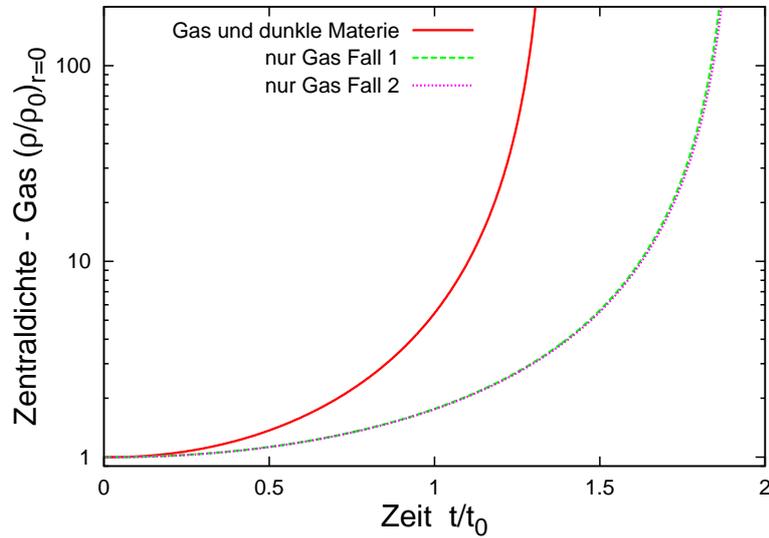


Abbildung 6.17: Verlauf der Zentraldichte für das System aus dunkler Materie und Gas sowie nur dem Gas ( $\gamma_b = 1.33$ )

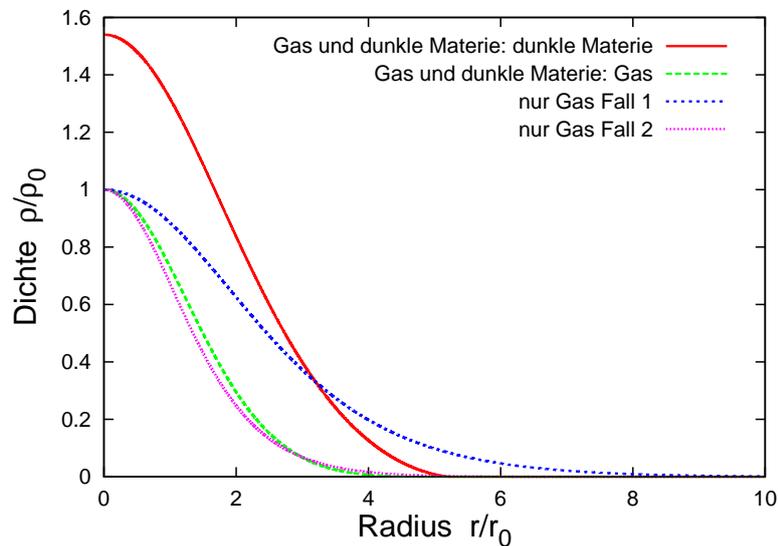


Abbildung 6.18: Anfangskonfigurationen für  $\gamma_b = 1.33$

Nach der Untersuchung eines Galaxienhalos wird nun die Dynamik eines Halos von der Dimension eines Kugelsternhaufens berechnet. Kugelsternhaufen sind kompakte Sternensammlungen innerhalb einer Galaxie, die das galaktische Zentrum umkreisen. Sie sind nahezu sphärisch. Der Massebereich von Kugelsternhaufen reicht von  $10^4 M_\odot$  bis  $10^6 M_\odot$  mit Radien von 10 pc bis 150 pc. Mit  $M = 10^4 M_\odot$  und  $R = 100$  pc und der schon zuvor

benutzten Anfangskonfiguration führt dies zu den absoluten Größen:

$$\begin{aligned}
 r_0 &= 5,9 \cdot 10^{19} \text{ cm} \\
 \rho_0 &= 3,6 \cdot 10^{-21} \text{ g cm}^{-3} \\
 t_0 &= 1,8 \cdot 10^{13} \text{ s} \sim 600000 \text{ Jahre} \\
 u_0 &= 3,3 \cdot 10^8 \text{ cm s}^{-1}
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

In Abbildung 6.19 ist nun der Verlauf der Zentraldichte für die oben beschriebenen Fälle dargestellt. Das Gas für Fall 1 kollabiert wie schon beim Galaxienhalo beobachtet. Auch im zweikomponentigen System bewirkt die Kühlung zunächst eine Komprimierung des Gases. Diese schwächt sich jedoch ab, so dass kein vollständiger Kollaps stattfindet. Die Temperatur in Fall 2 liegt schon anfänglich unter der Schwelltemperatur der Kühlfunktion. Daher bleibt die Verteilung hier nahezu stationär.

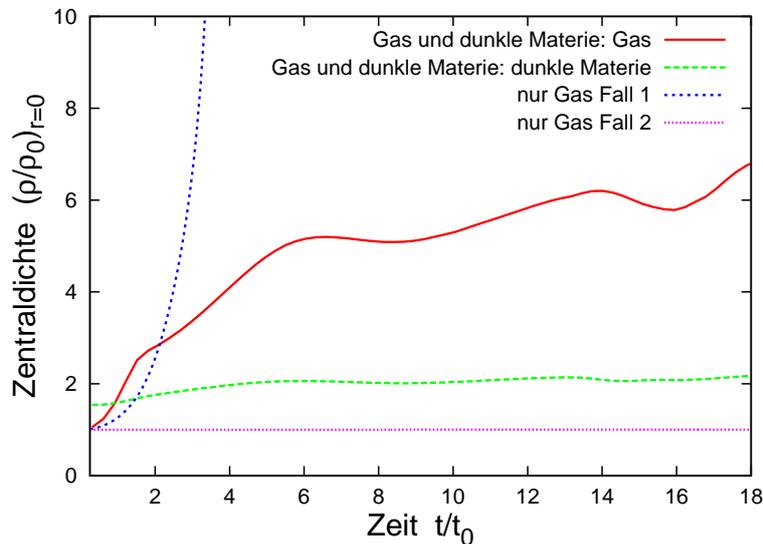


Abbildung 6.19: Verlauf der Zentraldichte für das System aus dunkler Materie und Gas sowie nur dem Gas ( $\gamma_b = 1.33$ )

Betrachtet man die Verteilung der Temperatur des Gases (bzw. des dazu proportionalen Druck-Dichte-Verhältnisses), fällt zunächst auf, dass durch die Kühlung die Temperatur nahezu schlagartig auf die Schwelltemperatur sinkt. Für das Gas in Fall 1 erkennt man, dass die Temperatur im Zentrum mit der Zeit noch weiter absinkt. Dies liegt daran, dass die Kühlung auch von der Dichte abhängt und daher, wenn die Zentraldichte stark steigt, weiter gekühlt wird. Dies führt wieder zu einer Erhöhung der Dichte und somit zu weiterer Kühlung.

Im zweikomponentigen System wird diese Entwicklung aufgehalten. In Abbildung 6.19 erkennt man gut, dass im zweikomponentigen System die Zentraldichte des Gases zunächst schneller ansteigt, als in Fall 1. Dann schwächt sich diese Entwicklung jedoch ab, während sie in Fall 1 verstärkt wird. Der Einfluss der dunklen Materie beschleunigt hier demnach nicht den Kollaps wie beim Galaxienhalo, sondern wirkt ihm entgegen.

Im Fall 2 wird durch die Präsenz der dunklen Materie effektive Kühlung erst möglich, da durch das tiefere Potential die anfängliche Gastemperatur viel höher ist.

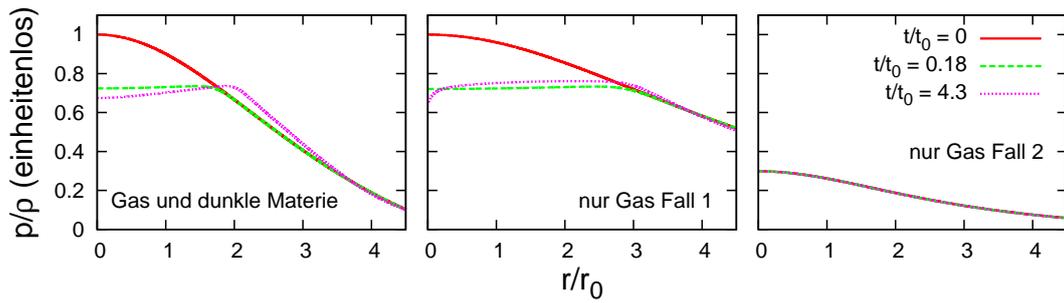


Abbildung 6.20: Verhältnis von Druck zu Dichte des Gases zu verschiedenen Zeitpunkten (bis zum Kollaps des Gases in Fall 1)

Die Schwelltemperatur ist in Abbildung 6.20 gut erkennbar. Ihr Verhältnis zur Anfangstemperatur kann durch Veränderung der radialen Ausdehnung variiert werden. Ein Halo, der bei gleicher Masse weiter ausgedehnt ist, hat eine höhere Temperatur, als ein kompakterer Halo. In Abbildung 6.21 ist der Verlauf der Zentraldichte für verschieden ausgedehnte Halos dargestellt. Es ist dabei zu beachten, dass die einheitenlose Zentraldichte immer auf die jeweilige absolute Anfangszentraldichte  $\rho_0$  bezogen ist. Diese nimmt jedoch mit wachsender Ausdehnung des Halos ab.

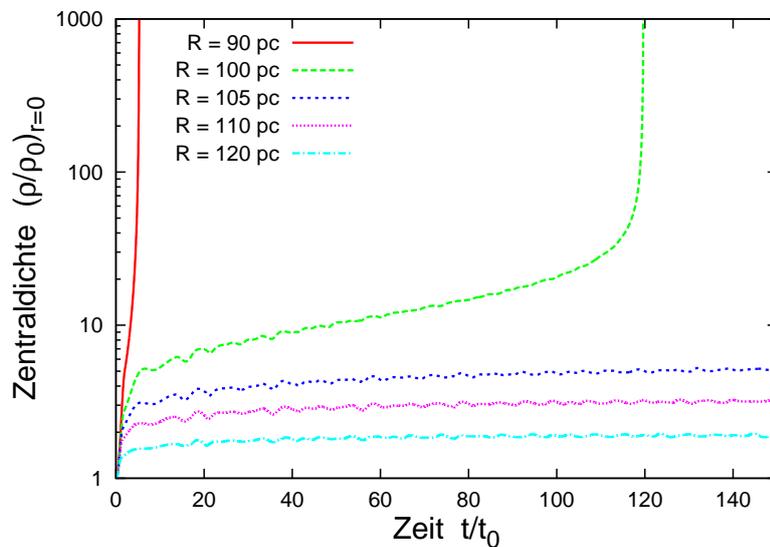


Abbildung 6.21: Verlauf der Zentraldichte für das System aus dunkler Materie und Gas für verschiedene radiale Ausdehnungen bis  $t/t_0 = 150$  ( $\gamma_b = 1.33$ )

Man erkennt, dass der zuvor betrachtete Halo mit  $R = 100$  pc nicht stabil bleibt, sondern auch kollabiert. Der kleinere Halo mit  $R = 90$  pc kollabiert sehr viel schneller. Die Entwicklung der größeren Halos ist in Abbildung 6.22 genauer dargestellt. Sie kollabieren nicht. Vielmehr fällt die Zentraldichte nach der Kompression leicht ab. Dieses Verhalten ähnelt dem in der Langzeitrechnung mit der vereinfachten Kühlfunktion (Abbildung 6.11) Beobachteten. Es liegt daher nahe, die Abhängigkeit dieses Merkmals vom Adiabatenexponenten zu prüfen. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Abbildung 6.23 dargestellt.

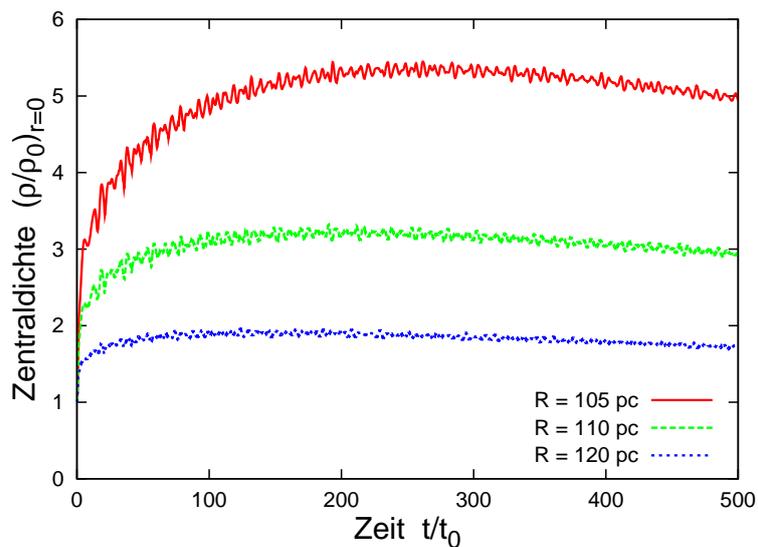


Abbildung 6.22: Verlauf der Zentraldichte für das System aus dunkler Materie und Gas für verschiedene radiale Ausdehnungen bis  $t/t_0 = 500$  ( $\gamma_b = 1.33$ )

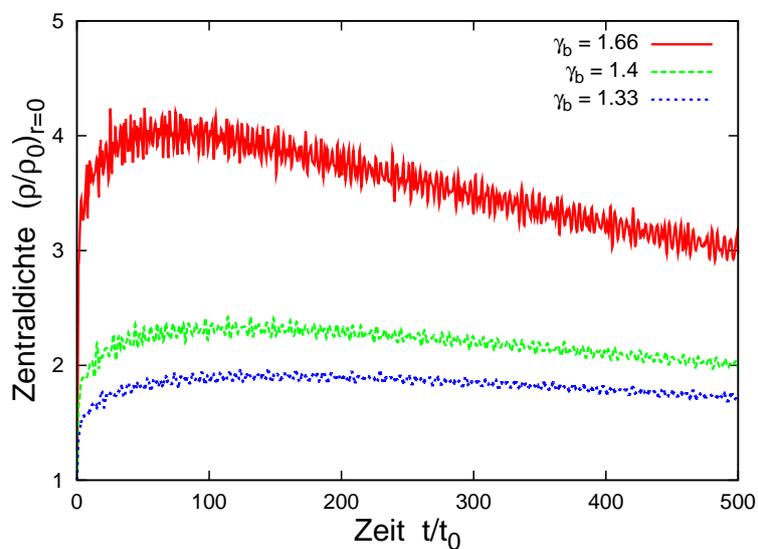


Abbildung 6.23: Verlauf der Zentraldichte für das System aus dunkler Materie und Gas für  $R = 120$  pc bis  $t/t_0 = 500$  für verschiedene  $\gamma_b$

Der größte Unterschied zwischen den Verläufen der Zentraldichte mit unterschiedlichen  $\gamma_b$  resultiert aus der unterschiedlichen Energiedichte (bei gleichem Druck), die das Gas zu Beginn hat. Dementsprechend wirkt sich die Kühlung, die nur von Temperatur und Dichte abhängt, unterschiedlich stark aus. Durch Darstellung der Verläufe der Zentraldichte für  $\gamma_b = 1.33$  und  $\gamma_b = 1.66$  mit unterschiedlich skalierten y-Achsen (Abbildung 6.24) lässt

sich überprüfen, ob sich der Adiabatenexponent des Gases auch qualitativ auf den Verlauf auswirkt. Man erkennt, dass für große Zeiten, der Abfall der Kurven gleich ist. Der Adiabatenexponent hat demnach keinen qualitativen Einfluss.

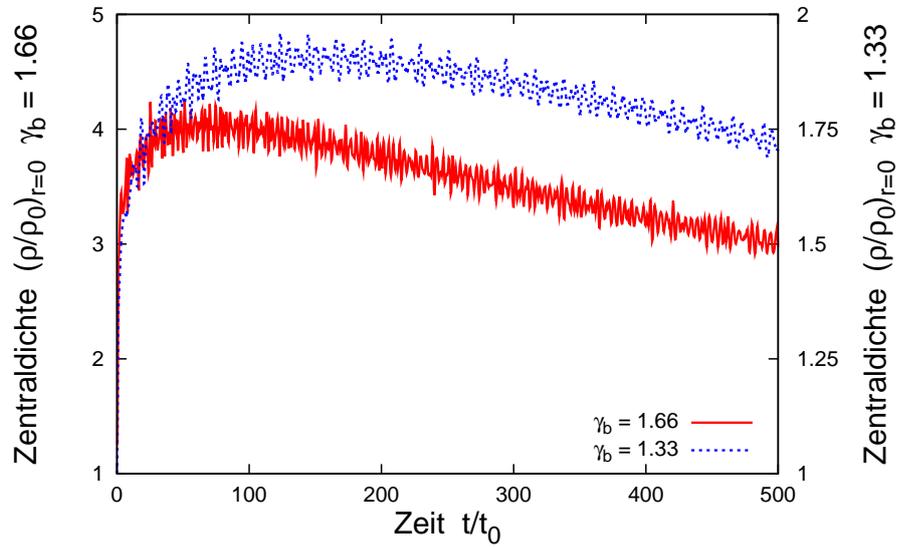


Abbildung 6.24: Verlauf der Zentralsdichte für das System aus dunkler Materie und Gas für  $R = 120$  pc bis  $t/t_0 = 500$  für verschiedene  $\gamma_b$

# Kapitel 7

## Diskussion und Fazit

In dieser Arbeit wurde mit Hilfe eines stark vereinfachten Modells die Dynamik eines Halos aus dunkler Materie und baryonischem Gas untersucht. Hierfür wurden zunächst unter einschränkenden Annahmen die dynamischen Gleichungen für die dunkle Materie hergeleitet. Als Grundlage wurde die kollisionsfreie Boltzmann-Gleichung verwendet und zusätzlich verlangt, dass die Geschwindigkeit der dunklen Materie lokal einer Maxwell-Verteilung gehorcht. Es wurden so für die dunkle Materie Gleichungen abgeleitet, die starke Analogien zu den Euler-Gleichungen der Hydrodynamik aufweisen. Dies gestattete es, Methoden der numerischen Fluid-Dynamik auch auf das Verhalten der dunklen Materie anzuwenden.

Es soll noch einmal betont werden, dass die dunkle Materie, wie sie in dieser Arbeit behandelt wird, nur unter bestimmten Vorbehalten mit der kollisionsfreien dunklen Materie, wie sie in der Literatur beschrieben ist, vergleichbar ist. Es wird hier die Existenz hinreichend schneller Prozesse (ohne diese weiter zu spezifizieren) vorausgesetzt, die zu jedem betrachteten Zeitpunkt eine lokale Maxwell-Verteilung herstellen. Dass dies in guter Näherung tatsächlich geschieht, ist aus numerischen Untersuchungen bekannt und wird zum Teil unter dem Begriff *violent Relaxation* beschrieben. Die dunkle Materie wird hier, durch die Annahme lokaler Maxwell-Verteilung, *de facto* wie ein Gas behandelt. Die Tatsache, dass der Gasdruck und sein Analogon  $\rho \sigma_r^2$  einander nicht beeinflussen, wie es bei einem gewöhnlichen Gemisch aus zwei Gasen der Fall wäre, qualifiziert dieses Modell jedoch zur qualitativen Untersuchung des Verhaltens des Gases. Die dunkle Materie wirkt nur über eine Änderung des Potentials auf die Gasdynamik ein. Würde man die dunkle Materie durch ein N-Teilchen System approximieren, welches auch nur eine Näherung darstellt, würde das geringfügig andere Potential keine qualitativen Unterschiede zu den hier vorgestellten Ergebnissen bewirken. Die durch die Annahme sphärischer Symmetrie einhergehende Vernachlässigung des Drehimpulses stellt, was die Vergleichbarkeit mit realen Objekten angeht, die größere Einschränkung dar. Eine volle dreidimensionale Betrachtung wäre von der numerischen Komplexität und der reinen Rechenzeit sehr viel aufwendiger. Die hier durchgeführte Untersuchung sollte insbesondere erste grundsätzliche Aussagen über das dynamische Verhalten des Zwei-Komponenten-Systems ermöglichen.

Zum Schwerpunkt der Arbeit entwickelte sich das Schreiben von zwei Programmen, mit denen eine stationäre Halokonfiguration sowohl bezüglich Gas als auch dunkler Materie erzeugt und deren, durch die Kühlung der Baryonen bewirkte Dynamik berechnet wurde. Weitere kleine Programme wurden zur Analyse der gewonnenen Daten erstellt. Trotz der sehr vereinfachenden Annahmen war eine relativ anspruchsvolle numerische Behand-

lung erforderlich. Nach dem Test mehrerer Routinen, fiel die Wahl schließlich auf ein Godunov-Schema 1. Ordnung. Nur mit einem solch aufwendigen Algorithmus lässt sich das vorgestellte nichtlineare Gleichungssystem lösen, ohne dass numerische Instabilitäten auftreten. Im folgenden werden noch einmal die aus diesen Rechnung erhaltenen Ergebnisse zusammengefasst und erläutert.

In allen Rechnungen wurde offenbar, dass die dunkle Materie der Bewegung des Gases (Kontraktion infolge Kühlung) folgt. Die Kontraktion der dunklen Materie ist jedoch weniger stark als die des Gases. In den Rechnungen mit der einfachen Kühlfunktion, konnte durch das Abschalten der Kühlung gezeigt werden, dass durch die in Bewegung gesetzte dunkle Materie das Gas stark beeinflusst wird. Das Gas sollte nach Deaktivierung der Kühlung in eine stationäre Verteilung übergehen, wird aber zu einer weiteren Kontraktion beeinflusst. Das Ergebnis ist eine wechselseitige Verstärkung der Kontraktion, deren Ausmaß hauptsächlich vom Adiabatenexponenten des Gases  $\gamma_b$  abhängig ist. Die Stärke der Kühlung hat keinen Einfluss auf diesen Prozess. Die Kühlzeit  $\rho\varepsilon/k$  ist hier nämlich deutlich größer als die dynamische Zeit mit der sich Druckschwankungen fortbewegen. Wie schnell der Druck sinkt, spielt hier keine Rolle, da mit dem Abschalten der Kühlung das Gas in sehr kurzer Zeit in einen stationären Zustand übergeht. Die Länge dieser Zeit hängt von  $\gamma_b$  ab: Ist  $\gamma_b$  klein, braucht das Gas länger, bis es den stationären Zustand erreicht hat. In diesem Fall wird die dunkle Materie ein wenig stärker komprimiert, was wiederum zu einem stärkeren Nachfallen des Gases führt. Für  $\gamma_b = \gamma_d = 5/3$  kommt der Kollaps von Gas und dunkler Materie gleichzeitig zum Stillstand. Es findet daher keine weitere Komprimierung statt.

Die durch die Kühlung bewirkte Umverteilung des Gases und der dunklen Materie bewirkt eine Änderung des Potentials, die eine Änderung der Gesamtenergie bewirkt. Dadurch dass die dunkle Materie sich komprimiert, ohne dabei innere Energie zu verlieren, wird die Änderung des Potentials nicht durch eine Änderung der inneren Energie durch Kühlung ausgeglichen. Das System gewinnt daher Energie. Dieses resultiert schließlich in der Expansion der Gaskugel, wie sie für große Zeiten beobachtet wurde. Die Dynamik nach dem Abschalten der Kühlung ist somit eine Überlagerung der erneuten Kontraktion durch die Kopplung von dunkler Materie und Gas sowie der Expansion, die durch den Energiegewinn aufgrund der Änderung des Potentials ermöglicht wird. Das Maximum der Zentraldichte ist gerade der Punkt, an dem die Expansionsbewegung des Gases dominant wird.

In den Rechnungen mit der realistischen Kühlfunktion (selbstregulierte Kühlung) konnte gezeigt werden, dass, im verwendeten Modell, ein Halo von der Größe einer Galaxie, durch die Kühlung in jedem Fall kollabiert. Das Gas hat anfänglich eine Temperatur, die weit über der Schwelltemperatur der Kühlfunktion liegt. Dadurch verliert das Gas in kurzer Zeit sehr viel Energie. Durch die schnelle Kühlung - die Kühlzeit ist hier deutlich geringer als die dynamische Zeit - kollabiert das Gas, als ob kein Druck vorhanden wäre. Das Gas kollabiert so stark, dass das verwendete Programm dies nicht mehr auflösen kann. Die Kollapszeit ist nun durch die Freifallzeit des Gases gegeben. Diese ist wiederum nur vom Potential abhängig. Druck und damit auch der Adiabatenexponent des Gases haben auf die Dynamik keinen Einfluss mehr.

In Vergleichsrechnungen wurde die Reaktion eines reinen Gashalos, ohne dunkle Materie, auf die Kühlung betrachtet. Es wurde der Fall des identischen Zentraldrucks des Gases in beiden Systemen, welcher zu einer Masse des Gashalos im Bereich der Gesamtmasse des kombinierten Systems führt, und der Fall der Massengleichheit zwischen reinem Gashalo

und Gaskomponente des kombinierten Systems behandelt. Es zeigte sich, dass beide Systeme gleich schnell kollabieren und dies langsamer als das kombinierte System tun. Die dunkle Materie verstärkt, dadurch dass nun zusätzliche Masse im Zentrum des Halos vorhanden ist, das Potential und beschleunigt so den Kollaps. Kühlung bei Systemen dieser Masse führt zu schneller Jeans-Instabilität.

Für Halos, deren Masse vergleichbar mit der von Kugelsternhaufen ist, stellt sich die Situation anders dar. Ihre anfängliche Temperatur ist deutlich geringer als die von Galaxienhalos, da sie zwar eine um  $10^5$  kleinere Masse haben, ihr Volumen aber um  $10^6$  geringer ist und die Materie in ihnen somit stärker konzentriert ist. Bedingt durch die niedrige Temperatur wird weniger stark gekühlt und außerdem wird die Schwelltemperatur der Kühlfunktion schnell erreicht. Die Kühlung führt, abhängig von der Anfangsausdehnung des Dichteprofiles und damit der Anfangstemperatur, zu einem Übergang des Systems in einen konzentrierteren quasistationären Zustand, der nach einiger Zeit kollabiert oder im Laufe der Zeit wieder langsam expandiert. Interessant ist dabei, dass die Grenze zwischen diesen Fällen bei der zuerst verwendeten Ausdehnung von 100 pc liegt. Halos, die kleiner sind, kollabieren, wobei die Zeit bis zum Kollaps bei abnehmender Ausdehnung sinkt. In diesem Fall ist die mittlere Dichte höher und die Freifallzeit, die proportional zu  $\bar{\rho}^{-\frac{1}{2}}$  ist, kleiner. Anfänglich weiter ausgedehnte Halos können wieder in Expansion übergehen. Der Adiabatenexponent des Gases hat hier aber, anders als es die Rechnungen mit der vereinfachten Kühlfunktion nahe legen, keinen Einfluss auf diese Expansion.

Die Entscheidung zwischen weiterem Kollaps oder Expansion wird offenbar durch die unterschiedlichen Bedingungen hinsichtlich des Jeanskriteriums, die erreicht werden, festgelegt. Hat das System soviel Energie verloren, dass das Jeanskriterium hinsichtlich der Instabilität der Gaskugel und/oder der sogenannten *gravothermischen Katastrophe* (siehe auch Padmanabhan 1989 [12]) der dunklen Materie erfüllt ist, dann ist der Kollaps nicht mehr aufzuhalten. Andernfalls, bei genügend ausgedehnter Dichteverteilung des Gases, also einem flacheren Potential bei gleicher Temperatur, bleibt das System stabil oder expandiert.

Anders als beim Galaxienhalo ergaben die oben erläuterten Vergleichsrechnungen beim Halo von der Größe eines Kugelsternhaufens kein identisches Verhalten. Im Fall der Gleichheit des Zentraldrucks von reinem Gashalo und Gaskomponente des kombinierten Systems kollabiert der Gashalo in jedem Fall. Es ist sehr viel mehr Gas in den Außenbereichen des Systems vorhanden, als im kombinierten System. Das Nachfallen dieses Gases bewirkt einen Dichteanstieg im Zentrum, welcher eine weitere Kühlung möglich macht. Diese Verkettung führt schließlich zum Kollaps des Halos. Der Gashalo im Fall der Massengleichheit zwischen Gashalo und Gaskomponente im kombinierten System zeigt keine nennenswerte Kontraktion, seine Temperatur ist zu niedrig für effektive Kühlung.

Neben dem erwarteten Verhalten bestimmter Konfiguration aus dunkler Materie und baryonischem Gas (modifizierter Kollaps bzw. Expansion), kommt es für eine bestimmte Wahl von Ausgangskonfigurationen zu kritischen Zuständen, die empfindlich auf eine Variation der Anfangsparameter reagieren. Dies kann als Hinweis darauf interpretiert werden, dass die detaillierte Physik (tatsächliche Kühlung, Mechanismus des Strahlungstransports, effektive Zustandsgleichung, Gaszusammensetzung etc.) unter bestimmten Umständen erheblichen Einfluß auf das grundsätzliche dynamische Verhalten von Halos haben kann.

## Danksagung

Bedanken möchte mich bei den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern des Astrophysikalischen Institutes Potsdam, in deren Umgebung ich diese Arbeit anfertigen konnte und die mir hilfreich zur Seite standen. Auch möchte ich Herrn Prof. Horst-Heino von Borzeszkowski danken, das er diese Diplomarbeit möglich gemacht hat. Besonderen Dank schulde ich meinem Betreuer Herrn Dr. Jan Peter Mückel. Die Zusammenarbeit mit ihm war nicht nur sehr produktiv, sondern auch ausgesprochen angenehm.

# Literaturverzeichnis

- [1] J. Binney and S. Tremaine. *Galactic dynamics*. Princeton, NJ, Princeton University Press, 1987, 747 p., 1987.
- [2] J. H. Black. The physical state of primordial intergalactic clouds. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 197:553–563, November 1981.
- [3] D. Clowe, M. Bradač, A. H. Gonzalez, M. Markevitch, S. W. Randall, C. Jones, and D. Zaritsky. A Direct Empirical Proof of the Existence of Dark Matter. *The Astrophysical Journal*, 648:L109–L113, September 2006.
- [4] S. K. Godunow. A finite difference method for the computation of discontinuous solutions of the equations of fluid dynamics. *Mat.Sb.*, 47:357–393, 1959.
- [5] M. J. Jee, H. C. Ford, G. D. Illingworth, R. L. White, T. J. Broadhurst, D. A. Coe, G. R. Meurer, A. Van Der Wel, N. Benitez, J. P. Blakeslee, R. J. Bouwens, L. D. Bradley, R. Demarco, N. L. Homeier, A. R. Martel, and S. Mei. Discovery of a Ringlike Dark Matter Structure in the Core of the Galaxy Cluster Cl 0024+17. *ArXiv e-prints*, 705, May 2007.
- [6] A. Kull, R. A. Tremann, and H. Boehringer. A Note on the Statistical Mechanics of Violent Relaxation of Phase-Space Elements of Different Densities. *The Astrophysical Journal*, 484:58–+, July 1997.
- [7] L. D. Landau and E. M. Lifschitz. *Lehrbuch der theoretischen Physik Band VI: Hydrodynamik*. Akademie-Verlag Berlin, 1971.
- [8] Dawid R. Lide. *CRC Handbook of Chemistry and Physics 76th Edition*. CRC Press, 1995.
- [9] D. Lynden-Bell. Statistical mechanics of violent relaxation in stellar systems. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 136:101–+, 1967.
- [10] T. K. Nakamura. Statistical Mechanics of a Collisionless System Based on the Maximum Entropy Principle. *The Astrophysical Journal*, 531:739–743, March 2000.
- [11] J. F. Navarro, C. S. Frenk, and S. D. M. White. A Universal Density Profile from Hierarchical Clustering. *The Astrophysical Journal*, 490:493–+, December 1997.
- [12] T. Padmanabhan. Antonov instability and gravothermal catastrophe - Revisited. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 71:651–664, November 1989.
- [13] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *Numerical recipes in FORTRAN. The art of scientific computing*. Cambridge: University Press, 1992.

- [14] F. Schwabl. *Statistische Mechanik*. Springer, Heidelberg, 2000.
- [15] D. N. Spergel, R. Bean, O. Doré, M. R. Nolta, C. L. Bennett, J. Dunkley, G. Hinshaw, N. Jarosik, E. Komatsu, L. Page, H. V. Peiris, L. Verde, M. Halpern, R. S. Hill, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, N. Odegard, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Three Year Results: Implications for Cosmology. *ArXiv Astrophysics e-prints*, March 2006.
- [16] D. N. Spergel, L. Verde, H. V. Peiris, E. Komatsu, M. R. Nolta, C. L. Bennett, M. Halpern, G. Hinshaw, N. Jarosik, A. Kogut, M. Limon, S. S. Meyer, L. Page, G. S. Tucker, J. L. Weiland, E. Wollack, and E. L. Wright. First-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Determination of Cosmological Parameters. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 148:175–194, September 2003.
- [17] Eleuterio F. Toro. *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1997.
- [18] Tscharnuter W.M. and Winkler K.-H. A method for computing selfgravitating gas flows radiation. *Computer Physics Communications*, 18:171–199, 1979.

Die selbständige und eigenständige Anfertigung versichert an Eides statt.

Berlin, den 8. Juni 2007

Jochen Sebastian Klar